DISSERTATION

Titel der Dissertation

„Die Unterstützung des Verstehensprozesses und neue Aspekte der Allgemeinbildung im Mathematikunterricht durch den Einsatz neuer Medien“

Verfasserin

Magistra Evelyn Stepancik

angestrebter akademischer Grad

Doktorin der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

Wien, im Jänner 2008

Studienkennzahl lt. Studienblatt: A 091 405

Studienrichtung lt. Studienblatt: Dr.-Studium der Naturwissenschaften Mathematik

Betreuer: ao Univ. Prof. Dr. Michael Grosser

Abstract

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in zwei große Teile, einen theoretischen und einen empirischen. Wichtige Verbindungen dieser beiden werden wiederholt herausgearbeitet.

Der erste Abschnitt enthält die drei Themenkreise *Allgemeinbildung*, *Aspekte des Begriffs „Verstehen“* und *Computer im Mathematikunterricht*. Dabei werden wichtige Allgemeinbildungskonzepte aus dem deutschsprachigen Raum und deren Bedeutung für einen Mathematikunterricht, in dem neue Medien eine große Rolle spielen, erörtert. Weiters wird der Frage nachgegangen, welche Aspekte des Verstehens für die Mathematik und den Mathematikunterricht wichtig und bedeutend sind. Es wird ein Bogen vom alltagssprachlichen Gebrauch des Wortes „Verstehen“ zu Ludwig Wittgensteins „Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik“ gespannt, wo er sich unter anderem dem Verstehen, insbesondere dem Verstehen eines Satzes und Beweises, widmet. Danach werden einige Einsatzmöglichkeiten des Computers im Mathematikunterricht aufgezeigt und Konzepte zur Aufbereitung multimedialer bzw. hypermedialer Inhalte vorgestellt. Großes Potenzial scheinen bei Letzterem vor allem die interaktiven Multimedia-Komponenten zu haben.

Der empirische Teil dieser Arbeit beruht auf einen Umfrage unter 1500 Schüler/innen und etwa 80 Lehrer/innen, die im Rahmen des Projektes „Medienvielfalt im Mathematikunterricht“ von mir konzipiert, durchgeführt und ausgewertet wurde. Bei der Gestaltung der Fragebögen (einer für Schüler/innen, einer für Lehrer/innen) wurde an vielen Stellen auf die theoretischen Aspekte des ersten Abschnitts rekurriert.

Die Ergebnisse zeigen deutlich, welchen Beitrag beispielsweise interaktive Übungen zum Verstehen leisten können und wie der Einsatz neuer Medien einen allgemein bildenden Mathematikunterricht fördern kann.

1. Einleitung

Allgemein bildender Mathematikunterricht und Einsatz neuer Medien sind zwei Bereiche, die einzelnen schon von vielen Didaktikern und Didaktikerinnen bearbeitet wurden, selten aber nur kam es zu einer Verbindung dieser beiden Themenkomplexe. Einerseits gibt es zahlreiche didaktische Publikationen zu einem allgemein bildenden Mathematikunterricht im deutschsprachigen Raum, die jedoch den Bereich neuer Medien nicht ansprechen, andererseits gibt es viele Schriften zum Einsatz des Computers im Mathematikunterricht, die ihr Bildungsmodell hingegen nicht explizit darstellen. Diese Trennung ist jedoch künstlich und blendet wesentliche Zusammenhänge aus: Jede Entscheidung für eine bestimmte Form des Einsatzes neuer Medien im Mathematikunterricht impliziert immer auch eine Entscheidung für ein bestimmtes Bildungsmodell und umgekehrt.

In dieser Arbeit möchte ich mich einer Untersuchung der Beziehung zwischen den beiden genannten Bereichen widmen und dabei insbesondere der Frage, inwieweit bzw. in welcher Form der Einsatz neuer Medien vom Gesichtspunkt der Allgemeinbildung aus zum Lehren, Lernen und Verstehen im Mathematikunterricht beitragen kann. Letzteres wird empirisch durch die Evaluationsergebnisse des Projekts „Medienvielfalt im Mathematikunterricht“ beleuchtet. Ein Teil dieser Befragung wurde von mir speziell im Hinblick auf die Fragestellung der vorliegenden Arbeit konzipiert und durchgeführt und ist somit als genuiner Teil diese Dissertation anzusehen.

Aus dem eben Gesagten ist offensichtlich, dass die dieser Arbeit zugrunde liegende Fragestellung eine Verbindung herstellen will zwischen zwei Bereichen, die wohl durch deutliche Wechselwirkungen verbunden sind, die sich aber sowohl inhaltlich als auch hinsichtlich der einzusetzenden Methoden deutlich unterscheiden – dem eher theoretisch zu erörternden Begriffsfeld der Allgemeinbildung auf der einen Seite und dem empirische Untersuchungen verlangenden Bereich der Unterrichtswirklichkeit des Einsatzes neuer Medien auf der anderen Seite.

Genau in diesem Spannungsverhältnis liegt die Schwierigkeit, aber auch der Reiz und die Herausforderung meiner Themenwahl. Es ist klar, dass eine Dissertation nur Teilaspekte eines so ausladenden Brückenschlags behandeln kann und viele Fragen weiterer Untersuchungen bedürfen. Ungeachtet dessen sollen dennoch schlüssige Implikationen zwischen den beiden Brückenköpfen herausgearbeitet werden.

Entsprechend dem Erkenntnisinteresse der vorliegenden Arbeit ergibt sich folgende Gliederung: Nach einer kurzen Besinnung auf die Unausweichlichkeit der Befassung mit neuen Medien im Mathematikunterricht in Kapitel 2 werden in Kapitel 3 die Konturen des von mir zugrunde gelegten Begriffs der Allgemeinbildung umrissen und hinsichtlich des Fachs Mathematik konkretisiert. Dabei soll kein neues Allgemeinbildungskonzept entwickelt oder eine systematische vergleichende Beurteilung bereits bestehender geliefert werden; vielmehr will ich mich aus Gründen, die weiter unten näher aus ausgeführt werden, hauptsächlich auf den von Heymann in „Allgemeinbildung und Mathematik“ (1996) vorgestellten Begriff der Allgemeinbildung stützen. Kapitel 4 ergänzt den theoretisch begrifflichen Rahmen um eine Diskussion einiger Aspekte des Verstehensbegriffs in der Mathematik, der in vielen didaktischen Arbeiten bloß in wenig oder gar nicht reflektierter Form verwendet wird; es bleibt meist bei einem impliziten Appell an die Alltagserfahrung des Gelingens bzw. Misslingens von Unterricht.

Das folgende Kapitel 5 ist bereits der Grundlegung des zweiten Brückenkopfes gewidmet, indem es ein begriffliches Instrumentarium zu den Formen des Computereinsatzes im Mathematikunterricht liefert, wie es sich heute darstellt. Anders als in den Kapiteln 3 und 4 ist hier das Interessenfeld in raschem und kontinuierlichem Wandel begriffen, sodass man sich hier oft mit einer (möglichst aktuellen) Momentaufnahme begnügen muss.

Die Kapitel 6 und 7 schließlich widmen sich der Beschreibung und Evaluation des Projekts „Medienvielfalt im Mathematikunterricht“. Hier werden die vermuteten Zusammenhänge und Wechselwirkungen zwischen dem Computereinsatz und der Allgemeinbildung sowie dem Computereinsatz und dessen Beitrag zum Verstehen thesenartig formuliert und anhand der Ergebnisse des Projekts bewertet werden. Die Schlussfolgerungen daraus werden einerseits bei den entsprechenden Fragen der Untersuchung gezogen, andererseits werden sie in Kapitel 8 noch einmal zusammengefasst.

2. Warum neue Medien?

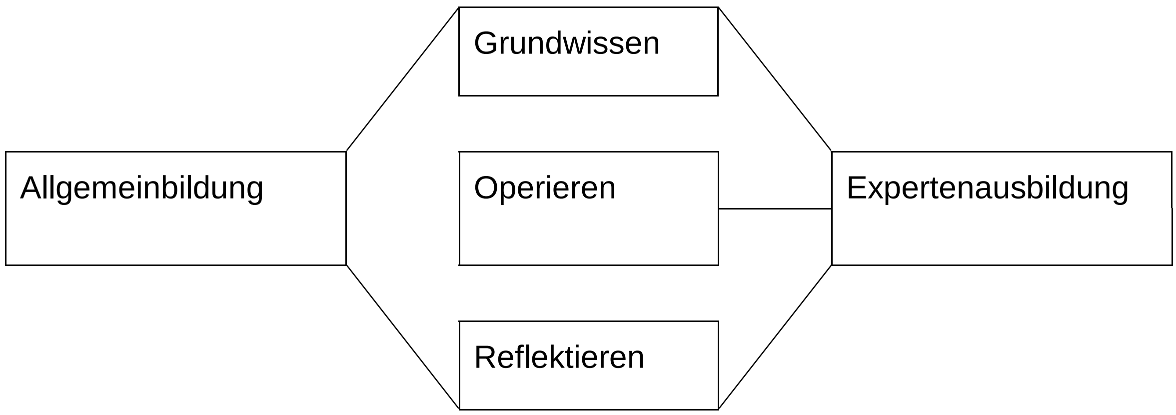
Warum neue Medien im Unterricht? Warum neue Medien im Mathematikunterricht? Diese Fragen in ihrer grundsätzlichen Form erscheinen mir mittlerweile mehr als obsolet. Ein Unterricht, ein Mathematikunterricht ohne den Einsatz moderner Technologien und Hilfsmittel geht nicht nur an den Forderungen des derzeit aktuellen Lehrplans, sondern auch an den Bedürfnissen der Heranwachsenden und der ihnen in Zukunft begegnenden Arbeitswelt vorbei.

Und dennoch – obwohl mir dies schon genug Rechtfertigung ist – möchte ich hier namhafte Fachdidaktiker und Fachdidaktikerinnen zu Worten kommen lassen, die schon vor langem einen der Gegenwart entsprechenden Unterricht verlangt haben und manchmal sogar explizit den Einsatz des Computers im Mathematikunterricht einforderten.

Wolfgang Klafki beispielsweise [Kla1, S. 20 ff.] geht davon aus, dass Erziehung den jungen Menschen zur Bewältigung und Gestaltung ihres Lebens verhelfen soll. Dabei soll die Gegenwart des zu Erziehenden als Ausgangspunkt gewählt werden. Klafki meint, dass diese Überlegungen bei der Auswahl von Bildungsinhalte zu berücksichtigen sind.

Ich kann Klafki und seinen Grundsätzen zur Auswahl der Unterrichtsinhalte nur zustimmen, möchte jedoch seine Überlegungen auch auf die Wahl der Methoden und technischen Hilfsmittel ausweiten, denn auch diese sollen der Gegenwart unserer Schüler und Schülerinnen entsprechen. Wählen wir die Gegenwart unserer Schüler/innen als Ausgangspunkt für derartige Überlegungen, dann ist offensichtlich der Computer immanenter Bestandteil ihres Daseins und daher sollte die opportune Verwendung des Computers im Mathematikunterricht obligatorisch sein.

Für Roland Fischer wiederum [Fi1, S. 5 ff.] ist ein wichtiges Ziel höherer Allgemeinbildung, die Schüler und Schülerinnen so auszubilden, dass sie mit Experten und Expertinnen kommunizieren können. Er teilt die zu erwerbenden Kompetenzen in die drei Bereiche „Grundkenntnisse und -fertigkeiten“, „Operieren“ und „Reflexion“ [Fi1, S.4]. Experten bzw. Expertinnen müssen nach Fischer in allen drei Bereichen kompetent sein, für den gebildeten Laien hingegen genügen die zwei Bereiche Grundwissen und Reflexion. Fischer veranschaulicht das in folgender Darstellung [Fi1, S. 4]:



Grundwissen und Reflexion sind also nach Fischer für Laien/Laiinnen bedeutsamer als das Operieren, obwohl auf dieses nicht gänzlich zu verzichten ist. In der Schule sollten die Ansprüche beim Operieren reduziert werden, dies wäre durch Auslagerung an den Computer möglich und damit könnte der Schulung von Grundwissen und dem Üben von Reflexion mehr Zeit und Rang beigemessen werden.

Fischer weist dem Computer also den Platz eines Hilfsmittels, einer Krücke – wenn ich seinen Text richtig lese – für den allgemein bildenden Mathematikunterricht zu. Allerdings ist zu beachten, dass die Auslagerung des Operierens möglicherweise zu anderen als allgemein bildenden Fragestellungen führen kann.

Edith Schneider, die in der Kommunikation zwischen Laien/Laiinnen und Experten/Expertinnen eine wesentliche Orientierung für den allgemein bildenden Mathematikunterricht sieht, meint, dass die Verwendung von Computeralgebrasystemen, also die spezielle Kommunikation zwischen Mensch und Maschine, Elemente besitzt, die auch für die Verständigung zwischen Laien/Laiinnen und Experten/Expertinnen wichtig sind [Schn, S. 37].

Sie macht auch deutlich, dass der Computer einen ihrer Meinung nach grundlegenden Wesenszug der Mathematik, nämlich die Auslagerung des Operativen, unterstützt und mithilfe von Maschinen eine „Extensivierung und Perfektionierung der Auslagerung" [Schn, S. 34] möglich ist.

H.-C. Reichel beschäftigt sich im Aufsatz „Nachhaltiger Mathematikunterricht" mit der Frage, was Schüler und Schülerinnen neben Rechenaufgaben noch lernen sollten und könnten. Die Schüler und Schülerinnen sollten im Mathematikunterricht selbstständiges aktives Problemlösen, nichtstandardisiertes Argumentieren und das Herstellen von Verbindungen mathematischer Begriffe mit Situationen aus Alltag und Umwelt lernen. Überdies erscheint es nötig, verstärkt Denkprozesse und nicht nur Ergebnisse zu verlangen. Die Prozessorientierung sei der Produktorientierung vorzuziehen und „hier könnte vielleicht auch der Einsatz elektronischer Medien oder von Computeralgebrasystemen das Gewünschte befördern“ [Re1, S. 3].

Reichel hat mit dieser Vermutung völlig Recht! So hat sich beispielsweise im Rahmen eines Projekts der Naturwissenschaftswerkstatt 2002/2003 gezeigt, dass der Einsatz des Internets – insbesondere der Einsatz von Lernpfaden – die Prozessorientierung und Begriffsbildung im Mathematikunterricht stark fördert. Interaktive Lernhilfen, so wie sie beispielsweise von mathe-online zur Verfügung gestellt werden, können wichtige Begriffsbildungsprozesse und Denkprozesse im Mathematikunterricht unterstützen [Em, S. 13 ff.].

3. Mathematik und Allgemeinbildung

Auf der Suche nach Inhalten und Methoden für einen qualitativ hochwertigen Mathematikunterricht stellen sich Lehrende immer wieder die Frage, was und wie unterrichtet werden soll. Ähnlich wie Edith Schneider [Schn, S. 18] bin auch ich davon überzeugt, dass Allgemeinbildungskonzepte wie etwa jenes von Hans Werner Heymann oder Roland Fischer dazu prädestiniert sind, Antworten auf diese didaktischen Grundprobleme zu geben.

Die gegenwärtig auch in Österreich geführte Diskussion und die bereits laufende Erprobung von Standards für den Mathematikunterricht vermag – wenn überhaupt – nur den Output von Unterricht und Schule zu steuern [Gö], wie Stefan Götz in einem Protokoll des GDM-Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Mathematikdidaktik in Österreich“ vermerkt.

Mein Vertrauen in die allgemein bildenden Aufgaben und Ideen von Hans Werner Heymann beruht zum einen auf deren immer wieder spürbar werdenden Praxisbezug, zum anderen auf seiner ausgewogenen Mischung aus Radikalität und Bodennähe.

Daher möchte ich im folgenden Abschnitt zuerst Hans Werner Heymanns Ideen zu einem allgemein bildenden Mathematikunterricht und erst danach andere ebenso heftig diskutierte Allgemeinbildungskonzepte vorstellen.

3.1 Hans Werner Heymann „Allgemeinbildung und Mathematik“

Die Fülle der vielfältigen und ebenso differenten Rezeptionen von Hans Werner Heymanns „Allgemeinbildung und Mathematik“ im Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Volume 29, Number 2 weist darauf hin, wie heftig seine Ideen diskutiert wurden. In den nun folgenden Ausführungen steht die Vorstellung der Heymannschen Ideen im Vordergrund, denen ich an manchen Stellen persönliche Erfahrungen und Erkenntnisse aus meiner Schul- und Unterrichtspraxis beifüge.

In Kapitel 3.1 beziehen sich alle Seitenangaben, die Heymann betreffen, auf [Hey].

3.1.1 Zur Begriffsbestimmung

Hans Werner Heymann vertritt in seinem Buch „Allgemeinbildung und Mathematik“ die These [S.11], dass die Idee der Allgemeinbildung, wenn sie konkret und gegenwartsbezogen ausgearbeitet ist, eine Orientierungshilfe für den Mathematikunterricht sein kann, allerdings kann kein Allgemeinbildungskonzept allein einen guten Mathematikunterricht hervorbringen, dazu bedarf es fachlicher Kompetenz und fachbezogener Phantasie.

Heymanns Anliegen ist weder die Revolutionierung der Vorstellung von Allgemeinbildung noch die radikale Umgestaltung des Mathematikunterrichts, vielmehr möchte er Anstöße zur Veränderung der Unterrichtspraxis geben, die auf einer neuen Betrachtungsweise vieler traditionsreicher pädagogischer Ideen ruhen.

Die in den achtziger Jahren (des vorigen Jahrhunderts/Jahrtausends) wieder vermehrt geführte Diskussion über die Begriffe „Bildung“ und „Allgemeinbildung“ führt Heymann einerseits auf die misslungene Bildungs- und Curriculumsreform [S. 14 ff.], andererseits auf die realen Veränderungen der Gesellschaft und ihrer Lebensbedingungen zurück. Auch das Eindringen der neuen Technologien in die Arbeitswelt und einige daraus resultierende radikale Forderungen zur Umgestaltung des Bildungssystems führten erst allmählich zur Reflexion der Begriffe „Bildung“ und „Allgemeinbildung“.

Heymann missfällt der in der Literatur anzutreffende wenig bzw. kaum explizit begründete Gebrauch der beiden Termini [S. 28 f.] „Bildung“ und „Allgemeinbildung“, die zudem auch in der Umgangssprache fast synonym verwendet werden. Für ihn vermag jeder der beiden Begriffe eine Antwort auf unterschiedliche Fragen zu geben und seine diesbezüglichen Ausführungen seien hier kurz vorgestellt, um sein Verständnis bzw. seine Präzisierung des Allgemeinbildungsbegriffs zu verdeutlichen, die auch für die hier vorliegende Arbeit von großer Bedeutung sind.

Die Fragen „Was macht das Menschsein des Menschen aus?“, oder „Wie wird der Mensch zum Menschen?“, sind philosophischer und anthropologischer Natur. „Bildung“ ist nach Heymann [S. 43] eine neuzeitliche Antwort auf diese Fragen.

Der Begriff „Allgemeinbildung“ antwortet auf die Fragen „Was sollen Kinder und Jugendliche an öffentlichen Schulen lernen?“, oder „Was und wie soll an öffentlichen Schulen unterrichtet werden?“.

Dennoch möchte er das Wort „Allgemeinbildung“ nicht nur in schulischem Kontext verwendet wissen. Hinsichtlich der Verzahnung von Schule und Allgemeinbildung stellt für Heymann Allgemeinbildung, welche die wesentlichen Grundzüge unserer Kultur repräsentiert, eine entscheidende Voraussetzung für individuelle Bildung dar. Daraus lässt sich ableiten, dass Schule, die sich um Allgemeinbildung bemüht, ihren Schülern und Schülerinnen die Möglichkeit von Bildung gibt [S. 43]. Zum Abschluss dieser Ausführungen, vor der Konkretisierung der Allgemeinbildungsidee konstatiert Heymann [S. 46], dass Allgemeinbildung eine Aufgabe der Gesellschaft ist, die aber großteils an die Institution Schule abgegeben wird. Bildung hingegen ist eine Aufgabe für den/die Einzelne/n und der/die Einzelne entscheidet sich möglicherweise für ein Bildungsideal und orientiert sich dabei an nur einem Menschenbild bzw. Bildungsideal. Die allgemein bildende Schule ist jedoch offen für viele verschiedene Bildungs- und Persönlichkeitsideale und es ist Aufgabe der Lehrenden, den Heranwachsenden eine Fülle von Bildungs- und Persönlichkeitsidealen vorzustellen, sodass diese dann selbst daraus wählen können.

Zurück zur Frage „Was und wie soll an öffentlichen Schulen unterrichtet werden?“. Im Zentrum der Konkretisierung seiner Allgemeinbildungsidee stehen bei Heymann „sieben Aufgaben der allgemeinbildenden Schule“ [S. 47], die handhabbare Kriterien zur Lösung der didaktischen Grundprobleme liefern und zur Beurteilung der Qualität eines allgemein bildenden Unterrichts herangezogen werden können. Sie sollen nun vorgestellt und analysiert werden.

Diese sieben Aufgaben der allgemein bildenden Schule verweisen wechselseitig aufeinander und lassen sich drei Dimensionen zuordnen. Die erste nennt Heymann „Befähigung zur Teilhabe am Vorgefundenen“, sie wird vor allem durch die Aufgaben „Lebensvorbereitung“ und „Stiftung kultureller Kohärenz“ erreicht. Die zweite – „Befähigung zur Erkenntnis über den engeren Lebenskreis hinaus“ – kann mithilfe von „Weltorientierung“ und der „Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch“ erfüllt werden. Für die dritte Dimension – die „Entfaltung des Menschlichen“ – bedarf es der Förderung von Verantwortungsbereitschaft, der Einübung in Verständigung und Kommunikation sowie der Ich-Stärkung.

3.1.2 Lebensvorbereitung

Dass Schule und das dort Gelernte die Heranwachsenden auf das Leben als Erwachsener vorbereiten sollen, wird wohl weitgehend öffentliche Zustimmung finden [S. 51]. Lebensvorbereitung – als Aufgabe der Schule – ist und war jedoch nicht immer ein einfach handhabbares Kriterium zur Entscheidung, was und wie an Schulen unterrichtet werden soll. Daher ist dieser Begriff zu präzisieren. Heymann unterscheidet zwei Auffassungen von Lebensvorbereitung [S. 60]. Erstens die „Lebensvorbereitung im engeren Sinn". Hierbei sollen die Heranwachsenden mittels konkret benennbarer, eingrenzbarer Situationen, die ihnen klar zu beschreibende Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten abverlangen, auf ihr Leben vorbereitet werden. Zweitens die „Lebensvorbereitung im weiteren Sinn", die meint, dass den Heranwachsenden Gelegenheit zu geben ist, in der Auseinandersetzung mit geistig herausfordernden Stoffen und Themen ihre individuellen Kräfte und Fähigkeiten soweit wie möglich zu entfalten. Dann werden sie auch auf die praktischen Anforderungen des privaten und beruflichen Lebensalltags vorbereitet sein. In Heymanns Allgemeinbildungskonzept ist die Lebensvorbereitung nur eine von sieben Aufgaben, er präferiert und spezifiziert die Lebensvorbereitung im engeren Sinn, als „*Vorbereitung auf all das, was Heranwachsende jetzt oder später für ihre Lebensführung in der Gesellschaft, in der sie aufwachsen, mit großer Wahrscheinlichkeit notwendig und unverzichtbar brauchen; und was sie – dieser Zusatz ist wichtig – ohne Schule großenteils nicht lernen würden*" [S. 61].

Heymann formuliert vier Kriterien [S. 62] mithilfe derer über Qualifikationen entschieden werden kann, die in einer allgemein bildenden Schule zu vermitteln sind. Die Qualifikationen sollen notwendig für eine „normale" Lebensführung sein, sie sollten nicht beiläufig und ohne systematischen Unterricht erworben werden können, sie sollten sich auch nicht im Rahmen zeitlich begrenzter Spezialkurse erwerben lassen und sie sollten von ihrer Struktur her für eine Vermittlung über systematischen öffentlichen Unterricht geeignet sein. Heymann führt zudem eine Liste von „formalen" und „materialen" Qualifikationen [S. 64] an, die erstens den eben angeführten Kriterien entsprechen und zweitens zunehmend wichtiger geworden sind, darunter befinden sich beispielsweise Lern- und Arbeitstechniken; Fähigkeit zur Selbstorganisation, zur selbstständigen Informationsbeschaffung; zum sachgerechten Umgang mit technischen Hilfsmitteln u. v. m. Die soeben vorgestellten Kriterien umreißen ein „Minimal-Curriculum" [S. 64] und legen fest, was im Unterricht einer allgemein bildenden Schule keinesfalls fehlen darf.

3.1.3 Stiftung kultureller Kohärenz

Einige grundlegende Erläuterungen Heymanns zum Kulturbegriff, zur kulturellen Identität, Kontinuität und Kohärenz seien hier wiedergegeben, um diese Aufgabe der allgemein bildenden Schule nachvollziehbar vorzustellen.

Heymann selbst geht von einem weiten, soziologischen Kulturbegriff aus und stellt in seiner Arbeit den viel zitierten Anthropologen Edward Taylor vor, der Kultur auffasst als „[*j*]*enes komplexe Ganze, das Wissen, Glauben, Kunst, Moral, Gesetz, Sitte und alle anderen Fähigkeiten und Gewohnheiten einschließt, die der Mensch als Mitglied der Gesellschaft erworben hat*" [S. 65].

Kulturelle Identität ist bei Heymann als kulturelle Identität des Einzelnen zu verstehen, die jedoch nicht immer eindeutig ist, da das Individuum verschiedenen sozialen Gruppen und damit auch verschiedenen Subkulturen angehören kann. Allgemein bildende Schule muss versuchen zur Entwicklung individueller reflektierter kultureller Identität beizutragen, die ein Anderssein anerkennt und es sollten kulturelle Errungenschaften, die hinreichend universell sind, hervorgehoben und betont werden [S. 67].

Kulturelle Kontinuität meint den diachronen Aspekt der Kulturentwicklung, kulturelle Kohärenz jedoch bezieht sich auf den diachronen und synchronen Aspekt der Kulturentwicklung.

Die Aufgabe der Schule ist nun genau die Stiftung kultureller Kohärenz. Dies bedeutet, dass Schule zum einen für kulturelle Kontinuität zu sorgen hat, zum anderen aber auch zwischen unterschiedlichen, zeitgleich bestehenden Teilkulturen zu vermitteln hat und einem eventuellen Aufspalten der Gesellschaft in disparate Kulturen entgegenzuwirken hat [S. 68]. Drei Teilaufgaben sind für Heymann zur Stiftung kultureller Kohärenz von besonderer Bedeutung. Auf diese möchte ich im Folgenden kurz eingehen:

Eine Teilaufgabe ist es, die „Verständigung zwischen den Generationen" [S. 74] möglich zu machen und aufrecht zu erhalten, diese Verständigung setzt jedoch einen Bestand an Gemeinsamkeiten voraus. Diese Gemeinsamkeiten bestehen aus Handlungsnormen, Wertvorstellungen, elementaren Kulturtechniken und vielem mehr. Allerdings müssen die gemeinsamen Wissensbestände stets umsichtig den gewandelten gesellschaftlichen Veränderungen angepasst werden. Eine umsichtige Anpassung an gesellschaftliche Veränderung wird, wenn wir e-Literacy, also die Fähigkeit Informations- und Kommunikationstechnologien zu nutzen und die Fähigkeit zum Umgang mit dem Computer, als Kulturtechnik betrachten, schwierig. Die Schnelllebigkeit und rasante Entwicklung der Informations- und Kommunikationstechnologien macht es scheinbar unmöglich, hier im Sinne Heymanns kulturelle Kohärenz zu stiften, auch wenn Schule die Aufgabe, den Computer in den Unterricht zu integrieren ernst nimmt. Eltern wollen und sollen verstehen, was ihre Kinder in den ersten Jahren lernen. Hier aber werden die Grenzen deutlich, wenn Schüler/innen schon im Volksschulalter den Umgang mit Informations- und Kommunikationstechnologien lernen und diese Kulturtechnik ganz selbstverständlich erwerben, ihre Eltern jedoch ein Schulleben ohne diese Kulturtechnik erfahren haben.

Eine weitere Teilaufgabe sieht Heymann darin, dass die allgemein bildende Schule Voraussetzungen schaffen muss, damit die Heranwachsenden eine reflektierte kulturelle Identität gewinnen können. Die Heranwachsenden sollen sich als Teil ihrer gegenwärtigen Kultur erleben und Verbindendes innerhalb der eigenen Kultur erkennen können [S. 74]. Zudem sollen sie das Andersartige anderer Kulturen als gleichberechtigte menschliche Daseinsform akzeptieren können. Um zur Ausbildung reflektierter kultureller Identität Anstöße zu geben, muss Schule einerseits tradierte Hochleistungen der eigenen Kultur an die Jugendlichen herantragen, andererseits muss sie die vielfältigen und oft ganz unterschiedlichen Erscheinungen der Gegenwartskultur aufgreifen, zueinander und zu den tradierten Hochleistungen in Bezug setzen, damit deren Verzahnung offensichtlich und nachvollziehbar wird.

Die dritte wesentliche Teilaufgabe, die jedoch bereits durch den Bereich der Lebensvorbereitung abgedeckt ist, sieht Heymann im Ergänzen der vor- und außerschulische Sozialisation und Enkulturation der Heranwachsenden, er nennt sie hier auch „Fortschreibung der Alltagskultur“ [S. 74].

3.1.4 Weltorientierung

Diese Aufgabe, nämlich die Ausstattung der Schüler und Schülerinnen mit „*materialem Wissen über die Welt*“ [S. 79], ist in vielen Konzepten, oft unter anderem Namen – z. B.: „Gesamtorientierung“ (Hardörfer 1978) oder „Weltverständnis“ (Helling 1963) – zu finden. Dabei wurde jedoch nach Ansicht Heymanns die Aufgabe der Weltorientierung völlig fehl interpretiert [S. 80]. Er beschreibt die Aufgabe Schüler/innen mit „*materialem Wissen über die Welt“* auszustatten folgendermaßen:

> „Die Schüler sollen einen Überblick haben, die Erscheinungen um sich herum einzuordnen wissen, sie zueinander in Beziehung setzen können, über ihren engeren Erfahrungshorizont hinaus über die Welt »Bescheid wissen«.“
> [S. 79]

Fälschlicherweise wurde *Weltorientierung* aber auch als *Enzyklopädismus* oder als *Wissenschaftsorientierung* ausgelegt. Vom Prinzip der Wissenschaftsorientierung lässt sich jedoch bei „bescheidener und behutsamer“ [S. 83] Interpretation einiges für die Aufgabe der Weltorientierung retten. Erstens – und dies erscheint mir so selbstverständlich, dass die Nennung hier nur aufgrund der Vollständigkeit erfolgt – sollte in der Schule nichts gelehrt werden, was die zuständigen Fachwissenschaften als falsch einstufen. Zweitens sollten die Heranwachsenden die Ergebnisse und Methode der jeweiligen Wissenschaften – wenn auch nicht im Detail – kennen lernen, insbesondere sollten sie die zentralen Gegenstandsbereiche, die Zuständigkeiten, die Problemlösekompetenzen und die spezifische Weltsicht der jeweiligen Wissenschaft kennen. Dabei sollen die Schüler/innen mittels *exemplarischer Vertiefung* in Einzelprobleme, Fragemethoden und grundlegende Ergebnisse Wissen aus den Inhalten und Anwendungen der jeweiligen Wissenschaften erwerben. Ähnliches formuliert Jerome S. Bruner: Er meint Schüler/innen sollen nicht Einzelfakten eines Faches lernen, sondern dessen grundlegende Strukturen. Für die „fundamental structure“ eines Faches gilt, dass sie sich in ihren fundamentalen Ideen zeigt [Bru2, S. 25].

Damit jedoch Schule der Aufgabe der Weltorientierung nachkommen und den Schülern und Schülerinnen den Aufbau eines differenzierten persönlichen Weltbildes ermöglichen kann, sind ferner die Aspekte f*achliche Entgrenzung*, *Einführung in konkurrierende Weltsichten* und die *Auseinandersetzung mit Welt- und Schlüsselproblemen* notwendig.

Fachliche Entgrenzung bedeutet, dass die Grenzen der Schulfächer und der ihnen zugeordneten Wissenschaften durchlässig zu machen sind. Fachlehrer/innen haben zu überlegen, welche der fachlichen Begriffe und Strukturen auch für das Verständnis sachlicher, sozialer und ideeller Alltagsprobleme wichtig sind bzw. sein könnten. Für die Mathematik wären in diesem Zusammenhang die Fragen: „Was ist berechenbar, was ist mathematisch modellierbar und was nicht? Zu welchen Ausblendungen verleitet die Beschränkung auf Berechenbares, auf Mathematisierbares?“ [S. 84], zu klären. Die zentralen Ideen eines Faches erlangen im Rahmen der fachlichen Entgrenzung erneut Bedeutung, Heymann plädiert dafür, zentrale Ideen eines Faches nicht nur mit Experten/Expertinnen, sondern auch mit interessierten und informierten Laien/Laiinnen zu diskutieren [S. 84].

Die Einführung in konkurrierende Weltsichten und damit auch die Vermittlung der Erkenntnis, dass es nicht nur eine gültige Wahrnehmung der Welt gibt, ist von großer Relevanz, damit der Mensch bzw. der/die Heranwachsende erkennen kann, wo er/sie steht und wo er stehen könnte [S. 86].

3.1.5 Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch

Die Idee, die dieser Aufgabe zugrunde liegt, wurde bereits von Kant 1784 als Definition der Aufklärung manifestiert. *„Aufklärung ist der Ausgang des Menschen aus seiner selbstverschuldeten Unmündigkeit. Unmündigkeit ist das Unvermögen, sich seines Verstandes ohne Leitung eines anderen zu bedienen*.“ [Ka, S. 9]

Die Erziehung zur Mündigkeit oder Emanzipation sowie die Befähigung zum kritischen Vernunftgebrauch beruhen auf der Annahme, dass „der Mensch ein des vernünftigen Denkens und der vernünftigen Selbstbestimmung fähiges Wesen“ [S. 89] ist und dass ihm vernünftiges Denken nicht in den Schoß fällt [S. 89]. Heymann nimmt eine präzise Beschreibung, die hier nur kurz umrissen wird, der Begriffe „Kritische Vernunft“, „Mündigkeit“, „Emanzipation“ und „Aufklärung“ vor [S. 89], um deren Relationen zu zeigen:

- Die eigene Vernunft kritisch zu gebrauchen, heißt, Behauptungen, Schlussfolgerungen, Werturteile u. v. m nicht unhinterfragt hinzunehmen. Kritischer Vernunftgebrauch ermöglicht zudem Selbstkritik, bedarf jedoch gedanklicher

Folgerichtigkeit und setzt Denkfähigkeit voraus. Ferner erfordert kritischer Vernunftgebrauch neben einem entwickelten Verstand die Einstellung, den Dingen mittels eigenen Verstandes auf den Grund gehen zu wollen.

- Kritischer Vernunftgebrauch wiederum ist die Voraussetzung für Mündigkeit und befähigt den Menschen zu Selbstständigkeit. Denn nur wer mündig ist, dem wird zugestanden und zugetraut, das Leben selbstständig in die Hand zu nehmen, selbstverantwortlich Entscheidungen zu treffen und somit selbstständig zu sein.
- Emanzipation, als Befreiung aus ungerechtfertigten Abhängigkeiten und falschen Zwängen verstanden, wird erst aufgrund von Selbstständigkeit, Mündigkeit und dem kritischen Vernunftgebrauch realisierbar.
- Aufklärung – und hier schließt sich der Kreis mit der Fortsetzung von Kants Definition – heißt: „Habe Mut, dich deines eigenen Verstandes zu bedienen!" Aufklärung verhilft zu Mündigkeit und Emanzipation, benötigt dafür jedoch definitiv kritischen Vernunftgebrauch.

Dass Heymann nun die vierte Aufgabe der allgemein bildenden Schule „Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch" nennt, liegt daran, dass er meint, mit dieser Formulierung das eigene Denken der Schüler und Schülerinnen stärker hervorzuheben und den Aspekt der formalen Bildung – kritisches Denken ist als universale formale Fähigkeit zu betrachten – dem Aspekt der materialen Bildung, der durch die Aufgabe der Weltorientierung eingelöst wird, gegenüberstellt [S. 91]. Außerdem hofft Heymann mit der gewählten Formulierung, das selbstständige kritische Denken stärker zu betonen und dem Missverständnis, Aufklärung und Emanzipation als (unkritische) Übernahme von kritischen Positionen zu verstehen, vorzubeugen. Die Begriffe „Emanzipation" und „Mündigkeit" thematisiert er eigens bei den weiter unten vorgestellten Aufgaben „Verantwortungsbereitschaft" und „Ich-Stärkung" [S. 91].

Den Schülern und Schülerinnen ist bei der schulischen Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch die Idee zu vermitteln, dass es sich dabei um eine sinnvolle und notwendige geistige Tätigkeit handelt, die zur Beurteilung und Bewältigung alltäglicher Probleme effektiv beitragen kann. Dabei soll erkennbar werden, dass „*wissenschaftliches Denken in vielerlei Hinsicht eine systematisierte, sich methodisch absichernde Spielart des Alltagsdenkens darstellt*" [S. 95].

Gegen eine so starke Unterordnung des wissenschaftlichen Denkens unter das Alltagsdenken wären aber berechtigte Einwände zu machen. Gerade in der Mathematik zeigt sich die Eigenständigkeit wissenschaftlichen Denkens, man denke dabei an die Umdeutung von Alltagsbegriffen wie „oder“ und „von“.

Heymanns Erörterungen und Konkretisierungen zu unterrichtspraktischen und didaktischen Konsequenzen seien hier nun überblicksartig dargelegt.

Zu Beginn stellt Heymann die Frage, was sich im Unterricht für eine allgemeine Denkschulung tun lässt und beruft sich bei deren Beantwortung auf neuere Erkenntnisse der kognitiven Lernpsychologie. Lernen ist als konstruktiver Akt zu betrachten, der auf geistigen Aktivitäten des Lernenden beruht. Lernen setzt aber auch Wissen voraus. Etwas zu wissen heißt jedoch nicht nur, eine Information empfangen zu haben, sondern sie auch interpretiert und zu anderem Wissen in Relation gesetzt zu haben. Ähnliches gilt für das Beherrschen einer Fertigkeit, die sich nicht nur durch mechanisches Abspulen eines feststehenden Handlungsablaufs manifestiert. Eine Fertigkeit wird erst dann wirklich beherrscht, wenn es möglich ist, sie an sich ändernde Bedingungen anzupassen.

Denkfähigkeiten und -fertigkeiten lassen sich (also) nicht abseits von konkreten Sachinhalten schulen [S. 96]. Auch Transfer der Denkfertigkeiten von einem Fach zum anderen konnte bisher nicht nachgewiesen werden, es erscheint daher umso bedeutsamer, vielfältige Denkanlässe mit Inhalten unterschiedlichster Art zu verbinden. Dies hätte zur Folge, dass sich Schüler und Schülerinnen eine Vielzahl inhaltlich gebundener „thinking skills“ [S. 97] aneignen würden. Neben der Verbindung von Denkfertigkeiten und Inhalten ist auch die Verbindung von kognitiven Fähigkeiten und Motivation entscheidend für den Lernerfolg und die Problemlösefähigkeit der Schüler und Schülerinnen. Das Wissen und Vorhandensein von Denkfertigkeiten ist nicht immer ausreichend, vielmehr sind die Bereitschaft und Motivation diese auch zu nützen, oft ausschlaggebend für die erfolgreiche Bewältigung von Aufgabenstellungen. Hinzukommt, dass die Motivation der Schüler und Schülerinnen ein neues Problem anzugehen ebenso von der Vorstellung ihrer eigenen Intelligenz abhängt. Wird sie als entwickelbares Potential empfunden, so tendieren die Lernenden eher dazu, schwierige Aufgabenstellungen als Herausforderung anzunehmen [S. 97].

Es scheint, als wäre die Rolle der sozialen Umgebung für das Denkenlernen wichtiger als bisher angenommen. Erhalten Schüler und Schülerinnen „die Gelegenheit zu kooperativem Problemlösen und zur Bedeutungskonstruktion im Austausch mit anderen“ [S. 97], so wirkt sich dies auch positiv auf den Lernerfolg des/der Einzelnen aus. Im Abschnitt 4.2.2 wird dieser Aspekt – Inhalt als relationale Angelegenheit – genauer ausgeführt.

Dieser Austausch mit anderen und das kooperative Arbeiten werden von manchen Lernplattformen unterstützt, deren Einsatz derzeit in verschiedensten eLearning-Projekten der Unter- und Oberstufe evaluiert wird. Allem Anschein nach können kommunikative und kollaborative Lernszenarien unterstützt durch moderne Technologien den Lernerfolg positiv beeinflussen.

Heymann versteht Denkschulung im Unterricht als „Lehrzeit” [S. 98] im Denken, für ihn gilt es, die Frage nach der Gestaltung einer kognitiven Umgebung, die lehrreiche Erfahrungen ermöglicht, zu beantworten. Erstrebenswert ist ein Unterricht, in welchem Aufgaben im Vordergrund stehen, die einerseits eine ernsthafte Herausforderung für Lernende darstellen und andererseits auch noch unabhängig vom Unterricht bedeutend sind. Selbstverständlich haben diese Aufgaben in sinnvollem Kontext zu stehen und sollen nicht allein dem Training von isolierten kognitiven Fähigkeiten dienen. Die Lernenden sollen zudem die Möglichkeit haben, andere – Mitschüler/innen und Lehrer/innen – bei ihren Aktivitäten zu beobachten, sind diese Aktivitäten nicht manueller Art, so soll darauf geachtet werden, dass diese geistigen Aktivitäten für alle sichtbar gemacht werden.

Dieses Sichtbarmachen geistiger Aktivitäten für alle wird so wie das kooperative Arbeiten durch einige Lernplattformen erleichtert. Denn viele Plattformen stellen ihren User/innen ein Forum zur Verfügung, das zur Sichtbarmachung geistiger Aktivitäten genutzt werden kann. Diese Foren haben zudem den Vorteil, dass die einzelnen Prozessschritte auch nach Abschluss des geistigen Handlungsprozesses allen Beteiligten zur Verfügung stehen und genutzt werden können.

Zum Abschluss dieser Ausführungen über das Denkenlernen aus kognitionspsychologischer Sicht weist Heymann auf die Aktualität älterer didaktischer Ansätze – namentlich der von Wagenschein – hin [S. 99]. Martin Wagenschein prägte den Begriff des „Genetischen Lehrens“ [Wa, S. 75f ff.] und versteht darunter eine genetisch-sokratisch-exemplarische Lehrweise. Genetisch ist für Wagenschein der führende Begriff diese Dreiheit, denn er ist überzeugt, dass „Genetisch“ zur Grundstimmung des Pädagogischen gehört, da die Pädagogik mit dem Werdenden, mit dem werdenden Menschen und mit dem Werden des Wissens in ihm zu tun hat. Die sokratische Methode gehört dazu, „*weil das Werden, das Erwachen geistiger Kräfte, sich am wirksamsten im Gespräch vollzieht*.“ [Wa, S. 75 ff.], und das exemplarische Prinzip ist für Wagenschein wesentlich, da sich ein genetisch-sokratisches Verfahren unbedingt auf einen exemplarischen Themenkreis beschränken muss [Wa, S. 75 ff.].

Nach Heymann sind neben den unterrichtspraktischen und didaktischen Überlegungen auch Ergebnisse empirischer Unterrichtsforschung hinzuzuziehen, die konkrete Belege dafür liefern, dass eingespielte Kommunikationsstrukturen und Handlungserwartungen den Unterrichtsverlauf und -erfolg stärker prägen als ursprünglich bei der Unterrichtsplanung intendiert [S. 100]. Die informelle Ebene des Unterrichts erlangt große Bedeutung, denn dort kann kritischer Vernunftgebrauch erlebt werden, wenn die Heranwachsenden erkennen können, dass die Qualität eines Arguments beispielsweise wesentlicher ist als der Status der Person, die dieses Argument vorbringt. Kritischer Vernunftgebrauch stellt ein Qualitätsmerkmal des sozialen Umgangs miteinander dar und stellt zudem hohe Anforderungen an alle Beteiligten. Erstrebenswert ist, zumindest zeitlich begrenzt und gruppenbezogen, einen kultivierten Umgang miteinander zu etablieren, denn dann kann sich die angestrebte Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch über die Sozialisationswirkung des Unterrichts vollziehen [S. 100].

Zu guter Letzt greift Heymann den aufklärerischen Anspruch des Denkenlernens auf und stellt die Frage, wie und ob Reflexivität des Denkens in der Schule realisierbar ist [S. 101]. Heymann konstatiert, dass isoliert stehende Inhalte, die für den Schüler und die Schülerin bedeutungslos sind und in keinem für sie relevanten Kontext stehen, sicher nicht zur Reflexivität des Denkens beitragen können. Er glaubt jedoch, dass „*je herausfordernder, vielperspektivischer, subjektiv erstaunlicher das ist, mit dem Kinder bzw. Jugendliche im Fachunterricht konfrontiert werden, je mehr Anknüpfungsmöglichkeiten an ihre eigenen Vorstellungen von der Welt sie dabei erkennen können […], desto größer die Chance, daß nicht nur das rationale Potential der Schüler aktiviert wird, sondern daß auch Anlässe zur Reflexivität, zur Rückwendung auf das eigene Denken wahrgenommen werden.*“ [S. 102]

Heymann erinnert seine Leser/innen auch daran, dass kritischer Vernunftgebrauch weder erzwungen noch definitiv verhindert werden kann, Erziehung und Unterricht kann bloß förderliche oder hemmende Rahmenbedingungen, wie bis hier bereits ausgeführt wurden, setzen.

Ich bin jedoch davon überzeugt, dass gerade die Mathematik und der Mathematikunterricht überaus viel zum Denken und zur Denkschulung beitragen kann und muss. So führt auch der Lehrplan für Mathematik „die Erziehung zu analytisch-folgerichtigem Denken" als Bildungs- und Lehraufgabe an [LP 1, S. 43].

3.1.6 Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft

Hans Werner Heymann ist davon überzeugt, dass heute trotz aller Schwierigkeiten schulische Allgemeinbildung die ethische Dimension der Bildung aufgreifen muss und soll. Allerdings ist zu überlegen, wie das bewerkstelligt werden kann [S. 105], da ein Anknüpfen an einen verbindlichen Wertekanon unmöglich erscheint.

Heymann und andere Bildungstheoretiker des 20. Jahrhunderts betrachten verantwortliches Handeln als ein entscheidendes Kennzeichen des gebildeten Menschen, „*verantwortlich verhält sich, wer die Folgen seines Handels (bzw. Nicht-Handelns) für sich und andere bedenkt und für sie einsteht*" [S. 105]. Vom Einzelnen kann Verantwortung gegenüber seinen Mitmenschen und auch seiner natürlichen Mitwelt – als Antwort auf die vorhandene ökologische Bedrohung – gefordert werden. Verantwortung steht bei Heymann aber auch „*für eine Rückbindung von Wissen und Sachkompetenzen in eine ethisch begründete Haltung*" [S. 106]. Also gilt, nur wer mit seinen Kompetenzen verantwortungsvoll umgehen kann, ist allgemein gebildet.

Verantwortungsbewusstsein oder Verantwortungsbereitschaft nennt Heymann [S. 106] jene Haltung, die den Menschen veranlasst, verantwortlich zu handeln. Verantwortliches Handeln und Denken lässt sich auch in der Schule – obwohl nur begrenzt – kultivieren (siehe übernächster Absatz). Wichtig ist für Heymann auch das Verantwortungsgefühl, denn er hebt hervor, dass verantwortliches Handeln Gefühl und Wissen voraussetzt [S. 106].

Am Schluss von Heymanns Ausführungen zur Beantwortung der von ihm bejahten Frage, ob Verantwortungsbereitschaft erlernt werden kann, konstatiert er, dass die Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft auf Weltorientierung und kritischen Vernunftgebrauch angewiesen ist, denn ohne differenziertes Weltbild, ohne Kritikvermögen und ohne einen Urteilshorizont, der über die subjektiven Lebensverhältnisse hinausreicht, ist Verantwortungsbereitschaft kaum zu verwirklichen.

Weiters diskutiert Heymann die stets in diesem Zusammenhang angesprochenen Schwierigkeiten, ob denn Verantwortungsbereitschaft unter schulischen Alltagsbedingungen überhaupt erlernbar sei und er äußert sich dahingehend, dass ein Verzicht auf ethische Normen die falsche Strategie wäre. Es gilt, das *Soll* und *Ist* nicht zu verwechseln. Realistische Zielsetzungen sind anzustreben, die einschränkenden Alltagsbedingungen sind ernst zu nehmen, aber nicht als einschränkendes Diktat zu verstehen.

3.1.7 Einübung in Verständigung und Kooperation

Hans Werner Heymann bezeichnet Verständigung als interaktives Verhalten, das auf Verstehen und Interessensausgleich abzielt [S. 110], Kooperation tritt dann ein, wenn „*gemeinsam auf ein Ziel hin gehandelt wird*" [S. 111]. Verständigung und Kooperation sind nach Heymann sogar als Überlebensbedingungen der Menschheit anzusehen. Wie und ob Schule überhaupt zur Einübung in Verständigung und Kooperation nach Heymann beitragen kann, sei hier nun umrissen.

Sehr früh schon machen allerdings alle Heranwachsenden die Erfahrung, dass es Situationen gibt, die ein stärker Ich-bezogenes Verhalten verlangen, das Konkurrenz- und Leistungsprinzip ist Kindern und Jugendlichen beispielsweise schon aus vielen gesellschaftlichen Bereichen außerhalb der Schule vertraut. In der Schule kann das Konkurrenzprinzip den durchaus positiven Effekt der extrinsischen Motivation haben, dennoch gilt es, für Schüler und Schülerinnen möglichst viele Situationen zu schaffen, in denen sich Verständigung als probates Mittel bewährt und sie erkennen, dass es sich lohnt Sachprobleme in gemeinsamer Arbeit anzugehen.

Die oftmals diskutierte Frage, ob fachliches und soziales Lernen in einem grundsätzlichen Konflikt zueinander stehen, verneint Heymann mit der Bemerkung, dass soziales

Lernen vor allem durch die Art, wie man zusammen miteinander fachlich lernt, stattfindet. Jede Form des Unterrichts hat unweigerlich auch eine soziale Komponente.

Bemerkenswert ist, dass die drei zuletzt vorgestellten Aufgaben der allgemein bildenden Schule, nämlich „*Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch*“, „*Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft*“ und „*Einübung in Verständigung und Kooperation*“ primär nicht über Inhalte, sondern über die Art des Umgangs mit den Inhalten vermittelt werden können. Auch die Verständigung und Kooperation zwischen Experten/Expertinnen und Laien/Laiinnen kann in der Schule weniger über Inhalte denn über den bewussten Umgang mit der Konstellation Lehrer/in-Schüler/in eingeübt werden. Das Problem der Verständigung zwischen Experten/Expertinnen und Laien/Laiinnen wird von Heymann als ein Schlüsselproblem unserer Welt erachtet. Jeder/jede von uns ist in einigen Bereichen Experte/Expertin, in vielen anderen jedoch nur ein/e Laie/Laiin. Ein gelingender Dialog zwischen Experten/Expertinnen und Laien/Laiinnen setzt einen „*allgemeinbildenden Experten*“ [S. 114], der über die Grenzen seines Fachs hinausblicken kann, und einen „*allgemeingebildeten Laien*“ [S. 114], der richtige Fragen stellen und deren Antworten bewerten kann, voraus.

Für die Schule gilt, da die Realisierung sozialer Tugenden nicht nur Sache der Einsicht und des guten Willens ist, sondern auch der Gewöhnung und Erfahrung bedarf, dass die Schüler und Schülerinnen möglichst viel soziale Praxis erlangen sollen, wofür sich etwa Projektunterricht, aber auch kooperative Arbeitsphasen und das paarweise Arbeiten am Computer eignen.

3.1.8 Stärkung des Schüler-Ichs

Die letzte der sieben Aufgaben der allgemein bildenden Schule nennt Heymann „Stärkung des Schüler-Ichs“ und hier werden jene pädagogischen Traditionen miteinbezogen, die die Pädagogik vom Kinde aus betreiben wollen. Es ist völlig zutreffend, wenn Heymann schreibt, dass auch die best gemeinten pädagogischen Maßnahmen den Heranwachsenden nicht einfach „übergestülpt“ [S. 117] werden können. Denn „*Verantwortung als ethisches, Verständigung als soziales, kritischer Vernunftgebrauch als personales und intellektuelles Prinzip setzen eine sich selbst als Subjekt begreifende, bewusst handelnde, Zivilcourage entwickelnde Persönlichkeit voraus, die sich zu solchen*

Werten zu bekennen vermag.“ [S. 117]. Mit der Stärkung des Schüler-Ichs wird versucht, den Schülern und Schülerinnen die Entwicklung eines Selbstbewusstseins, Selbstvertrauens und einer personalen Identität zu ermöglichen. Dies wiederum soll dazu führen, dass Schüler und Schülerinnen ihre eigenen Fähigkeiten, Ziele, Wünsche und Vorstellungen klar erkennen und verwirklichen können, wobei sie mit den eigenen Stärken und Schwächen realistisch umzugehen vermögen.

Um dieser Aufgabe in der Schule gerecht zu werden, ist die Schaffung curricularer und organisatorischer Rahmenbedingungen erforderlich, damit Freiräume für persönliche Entfaltung gewährt werden können.

Mit dem offenen Unterricht, dem offenen Lernen und dem eigenverantwortlichen Arbeiten wurden bereits in vielen Schulen organisatorische Rahmenbedingungen, wie Heymann sie zur Stärkung des Schüler-Ichs vorschlägt, geschaffen. Die Einbindung von Lernplattformen, Lernpfaden und ähnlichen Werkzeugen basierend auf Informations- und Kommunikationstechnologien fördert, stützt und erleichtert die organisatorischen Rahmenbedingungen zur persönlichen Entfaltung der Schüler/innen, da sie den Vorteil haben, eine große Fülle an Material einfach, komfortabel und stets verfügbar den Schüler/innen für den zum Teil selbstständig gewählten und selbstgesteuerten Lernprozess zur Seite zu stellen.

Heymann versteht die Aufgabe der Ich-Stärkung auch als Schutz vor Fremdbestimmung und zeigt die Diskrepanz zwischen den gesellschaftlichen Interessen der Erziehung und den Rechten bzw. der Würde des Einzelnen auf [S. 119]. Dieser Widersprüchlichkeit lässt sich nach Heymann im Sinne Schleiermachers lösen, der meint, dass „*Die Lebenstätigkeit, die ihre Beziehung auf die Zukunft hat, zugleich auch ihre Befriedigung in der Gegenwart haben muß* […] “ [S. 119], für den Heranwachsenden bedeutet dies, dass sein Tun, sein Lernen, das auf die Zukunft ausgerichtet ist, gleichzeitig auch seine gegenwärtige Situation, sein gegenwärtiges Ich befriedigen muss. Schule muss also den Schülern und Schülerinnen schulische Erfahrungen ermöglichen, die sie in ihre übrige Lebenswelt integrieren und als sinnvollen Teil ihres Lebens begreifen können, sonst beginnt – wie Heymann es ausdrückt – die „Opferung“ [S. 120] der Gegenwart für die Zukunft. Weiters muss Schule so gestaltet werden, dass die Heranwachsenden ihre gegenwärtigen Bedürfnisse und Interessen leben können. Die Achtung der persönlichen Würde ist unabdingbar.

3.1.9 Thesen zu Heymanns Allgemeinbildungskonzept

Nun möchte ich meine eigenen Thesen zu Heymanns Allgemeinbildungskonzept, die ich im vorangehenden Text bereits ausgebreitet habe, noch einmal kompakt zusammenfassend auflisten.

Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch

- Wissenschaftliches Denken ist in vielerlei Hinsicht eigenständig und kann dem Alltagsdenken nicht in dem von Heymann gefordertem Maße untergeordnet werden.

Einübung in Verständigung und Kooperation

- Kooperatives, kommunikatives und kollaboratives Arbeiten wird durch moderne Technologien unterstützt und mehr noch, sogar positiv beeinflusst.

- Das Sichtbar- und Verfügbarmachen geistiger Aktivitäten für alle am Lernprozess Beteiligten wird durch Lernplattformen – zum Beispiel mittels Foren – erleichtert, wobei die einzelnen Prozessschritte auch nach Anschluss des Lernprozesses sichtbar sind.

Stärkung des Schüler-Ichs

- Lernplattformen, Lernpfaden und ähnliche Werkzeuge basierend auf Informations- und Kommunikationstechnologien fördern, stützten und erleichtern die organisatorischen Rahmenbedingungen für einen Unterrichts, der die Stärkung des Schüler-Ichs zum Ziel hat, da eine große Materialfülle auf vielfältige Weise die individuelle Erprobung eigener mehr oder weniger ausgebildeter Fähigkeiten anregt, man denke beispielsweise nur an automatisierte Rückmeldungen auf auf/mit dem Computer beantwortete Fragen.

3.2 Weitere Bildungs- und Allgemeinbildungskonzepte

Zahlreiche Didaktiker/innen, Fachdidaktiker/innen sowie Bildungstheoretiker/innen haben Allgemeinbildungskonzepte entworfen und manchen haben versucht, diese speziell für den Mathematikunterricht zu formulieren. Im folgenden Abschnitt werde ich die Leser und Leserinnen ein stückweit durch die Geschichte und Ideen der Bildungs- und Allgemeinbildungskonzepte führen, zugleich werde ich mir an manchen Stellen eine kritischen Reflexion erlauben. Bevor ich zu diesen Ausführungen komme, möchte ich auf einen quer zu allen Ansätzen liegenden Gesichtspunkt eingehen, nämliche die zeitliche Einbindung von Bildung und Erziehung.

3.2.1 Bildung und Erziehung im Spannungsfeld von Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft

Wolfgang Klafkis Einfluss und Engagement in der deutschen Bildungsdiskussion der 70er Jahre ist unbestreitbar. Seine Theorien wurden von vielen Wissenschaftler/innen rezipiert oder beeinflussten deren eigenes Schaffen.

In seiner frühen Studie „Bildung und Erziehung im Spannungsfeld von Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft“ [Kla1, S. 9], die er bereits 1958 in einem Vortrag an der Pädagogischen Hochschule Hannover vorstellte, hebt er hervor, dass viele Phänomene menschlicher Existenz – so auch Bildung und Erziehung – nur vor dem Hintergrund der Trias von Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft gesehen werden können.

Der Stellenwert der drei Pole dieser Trias ist jedoch durchaus verschieden. Klafki geht davon aus, dass Erziehung den jungen Menschen zur Bewältigung und Gestaltung ihres Lebens verhelfen soll.

Den *Zukunftsbezug* betreffend führt Reichel allerdings eine ganz wesentliche Einschränkung ins Feld. Er meint, dass die Mathematik Schüler und Schülerinnen sehr wohl auch auf das praktische Leben vorbereiten soll, da die Lebenserfordernisse aber für jeden unterschiedlich sind und wir gar nicht wissen können, welche Forderungen das Leben an die zukünftigen Erwachsenen stellen wird, ist eine Vorwegnahme der zukünftigen Anforderungen problematisch [Re1, S. 6].

Klafki [Kla1, S. 15] ist überzeugt, dass nur die *Gegenwart* des zu Erziehenden als Ausgangspunkt des pädagogischen Handelns und Denkens gewählt werden kann. Diese Entdeckung meint er, sei Rousseau zu verdanken, den er als den ersten großen Vertreter eines „*pädagogischen Aktualismus*“ [Kla1, S. 15] bezeichnet.

Die Aufgabe der Schule besteht – so Klafki [Kla1, S. 22] – in der Auswahl von bewältigbaren Geschehnissen. Aber auch Probleme, die in der Gegenwart noch nicht lösbar sind, können und sollen sichtbar gemacht werden. So muss nach Klafki „*der Erzieher der Anwalt der Gegenwart des Kindes (…)*“ und „*der Anwalt der Zukunft des Kindes*“ [Kla1, S. 22] sein, womit er selbst sehr eloquent zwei der drei Dimensionen seiner oben erwähnten Trias miteinander verbindet.

Die dritte Dimension – nämlich die der *Vergangenheit* – hat dort ihre Relevanz, wo es zu klären gilt, welche Inhalte der Vergangenheit für die Bildung der jungen Menschen in Gegenwart und Zukunft Bedeutung haben. Nur jene „klassischen“ Werte, die den jungen Menschen nicht den Zugang zur Gegenwart und den Mut zur eigenen Zukunft rauben, sollen Teil von Bildung sein.

Die Grenzen dieses Bildungskonzepts, will man es auf den Mathematikunterricht übertragen, sind evident. Nur wenige mathematische Inhalte sind der kindlichen Gegenwart inhärent, es scheint sogar, als würden manch tradierte Inhalte den jungen Menschen den Mut zur eigenen mathematischen Zukunft nehmen. Hieße das aber nun jene Inhalte aus dem Unterricht zu streichen? Nein! Vielmehr erscheint es höchst notwendig, an einer methodisch und inhaltlichen Realisierung des von Klafki vorgestellten Bildungsbegriffs unter Beachtung der von ihm genannten Trias zu arbeiten, damit es gelingt, mathematische Modelle, Ideen und Verfahren in einen für Schüler und Schülerinnen alltagsrelevanten Kontext einzubinden. Die Beachtung der Gegenwartsdimension ist auch für die Mathematik und den Mathematikunterricht eine nicht zu vernachlässigende Größe.

3.2.2 Bildungstheoretische Aspekte bei Klafki und Wagenschein

Klafkis Ideen vorzustellen, ohne dabei Martin Wagenscheins Konzepte zu beleuchten, wäre so, als würde man Gästen ein Gulasch ohne Saft servieren. Ein durchdringendes Verständnis von Klafkis so genannter „*kategorialer Bildung*“ bedarf nicht nur eines aufmerksamen Studiums dieser, sondern auch der Kenntnis des „*exemplarischen Lehrens*“ bei Wagenschein. Beide Begriffe werde ich nun in ihrer geschichtlich gewachsenen Dimension beleuchten.

Zu einem Verständnis des Begriffs der kategorialen Bildung ist es nützlich, sich Klafkis Auseinandersetzung mit früheren Bildungstheorien vor Augen zu führen. Diesen „Umweg“ wollen wir im Folgenden gehen.

Klafki [Kla1, S. 25 ff.] wies bereits im Jahre 1959 daraufhin, dass sich die pädagogische Diskussion seiner Zeit vermehrt auf die Auswahl der Bildungsinhalte konzentrierte. Indes sind für ihn bei der Erörterung und Auswahl von Bildungsinhalten die Vorstellungen und Auffassungen darüber, was denn das Wesen von Bildung ist, maßgeblich. Um nun das Wesentliche der zugrunde liegenden Bildungsauffassung seiner damaligen Zeit zu erfassen, stellt er als Ausgangspunkt die Bildungstheorien des 19. und 20. Jahrhunderts sowie das damit verbundene pädagogische Denken dar. Basierend auf diesen kritischen Betrachtungen ist erst die damalige Bildungsdiskussion zu verstehen.

Klafki missbilligt am traditionellen, **bildungstheoretischen Objektivismus** des 19. Jahrhunderts und seinen Vertretern Dörpfeld und Guardini den Mangel an didaktischen Auswahlkriterien. Bei der **Bildungstheorie des „Klassischen“** hinterfragt er, welche Instanzen feststellen, was als klassisch zu gelten hat und gibt zu bedenken, dass es für viele Aufgaben unserer Zeit keine Klassik gibt, denn sie sind zu neu. Diese neuen Aufgaben der Erziehung und Bildung, für die es eben noch keine Grundlagen in der Vergangenheit gibt, sind für Klafki beispielsweise die Probleme der politischen Erziehung und der Erziehung zur Demokratie. Einer weitere wichtige und zumindest zum Teil nicht klassische Bildungsaufgabe nach Klafki [Kla1, S. 32] – und da stimme ich ganz mit ihm überein – ist es, den jungen Menschen bei der Bewältigung der von Naturwissenschaften, Technik und industrieller Arbeitsorganisation geprägten Lebenssituation zu helfen.

Die gegenwärtige und zukünftige Lebenssituation der Jugendlichen ist ohne Zweifel in hohem Maß von den Naturwissenschaften, der Technik sowie der Informations- und Kommunikationstechnologie geprägt. Die Mathematik als Unterrichtsfach an und für sich, aber auch der Einsatz des Computers und die möglichst effiziente Nutzung der zeitgemäßen Informations- und Kommunikationstechnologien im Mathematikunterricht erscheinen mir unabdingbar und im Sinne Klafkis einmal mehr gerechtfertigt und gefordert.

Ferner wird die Insuffizienz dieser beiden Bildungstheorien für den Mathematikunterricht für mich auch an folgendem Beispiel deutlich:

- Der bildungstheoretische Objektivismus versteht Bildung als die Aneignung von Kulturgütern, aber nicht alle mathematischen Kulturgüter können in der Schule vermittelt werden. Der Satz von Fermat ist zweifelsohne ein (mathematisches) Kulturgut, aber die Aneignung im Sinne von Beweisen dieses Inhalts kann in der Schule wohl kaum gefordert werden.
- Für die Bildungstheorie des „Klassischen“ ist der Begriff des Klassischen nicht an eine Epoche gebunden. Zum Begriff des Klassischen gehören Werte und Leitbilder eines Volkes oder Kulturkreises, insbesondere auch große Kulturschöpfungen. Wird der Satz von Fermat als Kulturgut akzeptiert, so kann er mit Sicherheit auch als große Kulturschöpfung bezeichnet werden, womit die Mangelhaftigkeit der Bildungstheorie des „Klassischen“ in Analogie zum bildungstheoretischen Objektivismus gezeigt werden kann: die fehlende Trennschärfe.

Nun aber zurück zu Klafkis kritischer Diskussion der Bildungstheorien. Die Theorie der **funktionalen Bildung**, so wie er sie nennt [Kla1, S. 33], hat ihre Wurzeln unter anderem in Erich Lehmensicks 1926 durchgeführter Untersuchung der formalen Bildung. Die Leitformel dieser populären Bildungstheorie lässt sich mit den Worten „*Bildung der Kräfte des Kindes*“ [Kla1, S. 33] kurz und prägnant wiedergeben, dem gegenüber wird die Frage der Inhalte als sekundär zu entscheiden angesehen. Klafki formuliert den Kern dieser Bildungstheorie folgendermaßen [Kla1, S. 33]:

> „Das Wesentliche der [funktionalen] Bildung ist nicht die Aufnahme und Aneignung von *Inhalten*, sondern Formung, Entwicklung, Reifung von körperli-

> chen, seelischen und geistigen *Kräften*. Bildung als Werk ist der Inbegriff der in einer Person geeinten, bereitstehenden Kräfte des Beobachtens, Denkens und Urteilens, des ästhetischen Gefühls, des ästhetischen Wertens, Sich-Entschließens und Wollens usf., die dann an den Inhalten der Erwachsenenexistenz in »Funktion« treten können.“

Für die hier gemeinten Kräfte gilt nach der Theorie der funktionalen Bildung:

> „Was der junge Mensch an einer Stelle als Kraft gewonnen habe, das werde sinngemäß auf andere Inhalte „übertragen“ [Kla1, S. 33].

Die Grundlagen der funktionalen Bildung und das Verständnis von Bildung als Ausprägung von geistigen Kräften reichen bis zu Pestalozzi zurück. Bereits dieser prägte den Begriff „Kräfte“ und unterscheidet „Herzenskräfte“, deren Ausbildung er „Erziehung“ nennt sowie intellektuelle und handwerkliche Kräfte, deren Entfaltung er als „Bildung“ [Kuh, S. 60 ff.] bezeichnet. Für Pestalozzi sind konkrete Lerninhalte relativ unwichtig, der Entfaltung von Kräften und Anlagen misst er jedoch große Bedeutung zu. Wesentlich ist für ihn, was im Kinde durch die Auseinandersetzung mit dem Stoff passiert. Weiters meint Pestalozzi, dass nicht die Vermittlung von Wissen, sondern der Erwerb von Können vorrangig sei. Die Denk-, Merk- und Vorstellungskraft des Kindes soll durch Bildung gestärkt werden. Dabei kann sich jede einzelne Kraft nur mittels ihres Gebrauchs entfalten [Kuh, S. 60 ff.], wobei auf die Selbsttätigkeit des Kindes großes Augenmerk gelegt werden muss.

Auch für die funktionale Bildung hat also nicht die Aufnahme und Aneignung von Inhalten höchste Priorität, sondern die Formung, Entwicklung und Reifung körperlicher, seelischer und geistiger Kräfte [Kla1, S. 33]. Klafki indes stellt in Frage, ob das Wesentliche der Bildung wirklich diese Formung, Entwicklung und Reifung von körperlichen, seelischen und geistigen Kräften, die als geistige Muskeln gedacht werden, ist. Er lehnt diese Theorie aus verschiedensten Gründen ab, von denen einer – nämlich seine eigene Unterrichtserfahrung – hier erwähnt sei. Sie zeigt, so Klafki, dass Schüler/innen, die beispielsweise in Mathematik die Fähigkeit zu „beziehendem Denken“ haben, diese Fähigkeit im Bereich der Sprachen kaum besitzen müssen. Eine *weitere* Differenzierung der Fähigkeiten oder „Kräfte“ nach Inhalten schließt er aus, da für ihn ein Denken abhängig von der Struktur der Inhalte inakzeptabel ist.

Zur Frage des Transfers von Kompetenzen sei hier noch Heinzes aktueller (JMD 2007) Artikel „*Problemlösen im mathematischen und außermathematischen Kontext*“ erwähnt, in dem er unter anderem auch die überaus interessanten Ergebnisse einer Studie von Carraher und Schliemann (1985) darstellt [Hei, S. 12]. Die beiden untersuchten die mathematischen Strategien von brasilianischen Straßenkindern, die als Straßenhändler arbeiten.

Dabei zeigt sich:

1. Aufgaben im Kontext des Straßenhandels konnten zu 98% korrekt gelöst werden.
2. Die gleichen Aufgaben vom Kontext abgelöst (etwa die Aufgabe $5 \cdot 35$ statt fünf Zitronen zu 35 Cruzeiros) wurde nur von 37% korrekt gelöst.
3. Aufgaben in Form von Textaufgaben aus der Erfahrungswelt dieser Kinder konnten wiederum von 74% korrekt gelöst werden.

Insgesamt seien – so Heinze – die Ergebnisse der Transferforschung als enttäuschend anzusehen und Transfer kann bisher nur dann nachgewiesen werden, wenn es sich um sehr ähnliche Probleme im gleichen Kontext handelt oder wenn es um Probleme geht, die eine gleiche Struktur aufweisen, wobei hier allerdings vorauszusetzen ist, dass das notwendige Wissen dekontextualisiert vorliegt [Hei, S. 12].

Auch meine eigene Unterrichtserfahrung zeigt, dass der Transfer von Denkleistungen nicht immer vollzogen wird. Schüler/innen, die im Mathematikunterricht folgerichtiges Denken und Schließen als Fähigkeit erworben haben, setzen diese nicht immer in ihren Argumentationssträngen des Deutschunterrichts um. Umgekehrt nähern sich Schüler und Schülerinnen manchmal auf erstaunliche kreative Art und Weise einem literarischen Text, aber ihre Herangehensweise an mathematische Problemstellungen lässt derartige Kreativität missen.

Dennoch bin ich geneigt, mich Klafkis Kritik an der funktionalen Bildung nicht uneingeschränkt anzuschließen. Anstelle von geistigen Kräften würde man heute wohl eher von Kompetenzen, vielleicht auch von überfachlichen Kompetenzen sprechen, deren Ausbildung und Überprüfung zumindest derzeit en vogue scheint (siehe Abschnitt 3.3).

Die Theorie der **methodischen Bildung** lehnt Klafki ab, da sich die Methoden, mit denen junge Menschen sich ihr Wissen aneignen, seiner Auffassung nach, entgegen der dort vertretenen Meinung, nach den Inhalten richten müssten. Die Theorie der methodischen Bildung wurde in Deutschland unter anderem durch den Arbeitspädagogen Georg Kerschensteiner, der Bildung auch der arbeitenden Bevölkerung zugängig machen wollte, entwickelt. Vorrangig für Vertreter/innen dieser Bildungstheorie war der Vorgang, indem junge Menschen Bildung erwerben. Bildung in diesem Sinne bedeutet die Aneignung von Denkweisen, Gefühlskategorien und Wertmaßstäben – kurz „Methoden" genannt [Kla1, S. 36]. Eine derartige Bildung umfasst die Fähigkeit, Werkzeuge zu gebrauchen, Werktechniken zu beherrschen, ein Lexikon sowie eine Wörterbuch benutzen zu können, mathematische Lösungsmethoden zu kennen und vieles mehr.

Klafkis Kritik an der methodischen Bildung ist somit der an der funktionalen Bildung ähnlich: Er meint, es wäre unsinnig, Methoden ohne Bezug auf Inhalte zu diskutieren.

Analog zu meinem oben geführten Einwand kann ich auch diesmal Klafki nicht unbedingt zustimmen. Es ist offensichtlich, dass die Methoden des Wissenserwerbs heute für Schüler und Schülerinnen sehr wohl große Bedeutung haben. Viele Schulen, Lehrer und Lehrerinnen widmen sich einem Methodentraining, z. B. ist das Methodentraining nach Heinz Klippert besonders gefragt. Dieses systematische Methodentraining ist auch unter dem Schlagwort „Eigenverantwortliches Arbeiten = EVA" bekannt und wird von vielen pädagogischen Instituten für verschiedenste Fächer – darunter auch Mathematik – angeboten. Klippert meint, dass anstelle von Belehrung und Unterweisung Selbstständigkeit und Selbsttätigkeit zu fordern und zu fördern ist [Kli, S. 18]. Dafür aber müssen die Schüler und Schülerinnen Lern- und Arbeitstechniken erwerben, die ihnen Selbstständigkeit und Selbsttätigkeit ermöglichen.

Klippert ist sogar der Ansicht, dass „Methodenlernen" die Mündigkeit der Schüler und Schülerinnen fördert. Er meint, dass Schüler und Schülerinnen, die gelernt haben, selbstständig zu arbeiten, selbstständig zu planen, zu organisieren, Probleme zu lösen, Informationen auszuwerten, kritisch-konstruktiv zu argumentieren, ein hohes Maß an persönlicher Autonomie und Handlungskompetenz erworben [Kli, S. 27] und somit die Fähigkeit zu Selbstbestimmung und Mündigkeit haben.

Allerdings wäre ein Training der Methoden ohne Inhalt – und da schließe ich mich Klafki an – wenig sinnvoll. Ein Training anhand mathematischer Inhalte zu jenen Methoden, die für den Mathematikunterricht wertvoll sind, erscheint mir allerdings durchaus angebracht. Anzumerken ist jedoch auch, dass manche Methoden nicht nur in einem Fach, sondern durchaus universell einsetzbar sind.

Meine eigene Unterrichtserfahrung mit eigenverantwortlichem Arbeiten zeigt, dass die Methodenvielfalt der Lehrenden und die damit verbundene Methodenkompetenz der Schüler und Schülerinnen positive Auswirkungen auf den Wissenserwerb haben.

Zu guter Letzt sei noch erwähnt, dass Klafki in allen vier oben umrissenen Ansätzen Wahrheitsmomente sieht, deren Unzulänglichkeit zeigt sich für ihn aber vor allem in praktisch-pädagogischen Konsequenzen. Er strebt dennoch keine Synthese der oben diskutierten Bildungstheorien an, sondern will Bildung als ein Ganzes, nicht als die Zusammenfügung von „Teilbildungen" verstanden wissen. Befragt man nun Klafkis „Studien zur Bildungstheorie und Didaktik" [Kla1] nach einer schlussendlichen Definition seines eigenen zugrunde gelegten Bildungsbegriffs, so stößt man auf folgenden Formulierungen:

Klafki bestimmt Bildung

- **resultathaft** als das „Erschlossensein einer dinglichen und geistigen Wirklichkeit für einen Menschen" und zugleich das „Erschlossensein dieses Menschen für diese seine Wirklichkeit" [Kla1, S. 43],
- **prozesshaft** als einen Vorgang, sich die Inhalte einer dinglichen und geistigen Wirklichkeit zu erschließen,
- als **kategoriale** Bildung in dem Doppelsinn, dass sich dem Menschen eine Wirklichkeit „kategorial" erschlossen hat und er damit selbst für diese Wirklichkeit erschlossen worden ist [Kla1, S. 44].

Offensichtlich erschließt sich diese Definition einem tieferen Verständnis nur mit längeren vorangehenden Textabschnitten von Klafkis „Studien zur Bildungstheorie und Didaktik" [Kla1], in denen die oben auftretenden theoretischen Begriffe aufbereitet werden. Dies würde jedoch definitiv den Rahmen der vorliegenden Arbeit sprengen. Für unsere Zwecke ist es indes ausreichend, Klafkis oben umrissene kritische Stellung zu den anderen Bildungstheorien sowie seine Bezugnahme auf die von Wagenschein begründete Didaktik des *Exemplarischen*, *Typischen*, *Repräsentativen* und *Elementaren* einzubeziehen.

Inhalte dieser Bildung sollen somit nur jene sein, die den Kriterien der kategorialen Bildung entsprechen. Inhalte, die nicht *repräsentativ* für grundlegende Sachverhalte und Probleme sind, sollen nicht Teil dieser Bildung sein. Die Aufgabe der (Fach-)Didaktik wäre es, ausgehend von der geschichtlich gegebenen Bildungswirklichkeit und den daraus erwachsenden Bildungsaufgaben Kategorien und Strukturen zu ermitteln, die eine Auswahl des *Exemplarischen*, *Typischen*, *Repräsentativen* und *Elementaren* unter Berücksichtigung der Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft des jungen Menschen ermöglichen.

Unter der Prämisse, dass Bildung *exemplarisch*, *typisch*, *repräsentativ* und *elementar* sein soll, will Klafki den Begriff des Kategorialen als Hindeutung auf den Wesenskern der Bildung verstanden wissen.

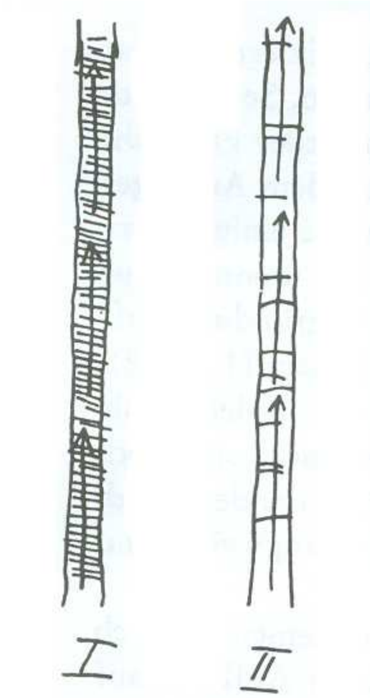
Der Grundgedanke des exemplarischen Lehrens und Lernens beruht nicht auf der reproduktiven Aneignung möglichst vieler Einzelkenntnisse oder -fertigkeiten, sondern auf der aktiven Erarbeitung allgemeiner, weit reichender Kenntnisse, Fähigkeiten und Einstellungen, sowie des Erfassens übergreifender Zusammenhänge, Gesetzmäßigkeiten und Strukturen. Mit dem exemplarischen Lernen soll auch die Fähigkeit ausgebildet werden, dass Schüler und Schülerinnen aus eigener Initiative weiterlernen [Kla2, S. 143 ff.].

Wesentliche Bedeutung für das exemplarische Lehren und Lernen haben nach Klafki die „*Schlüsselprobleme*“ [Kla2, S. 154] oder auch „*epochaltypischen Schlüsselprobleme*“ [Kla2, S. 56 ff.], welchen er die Friedensfrage, die Umweltfrage, die Frage nach der gesellschaftlich produzierten Ungleichheit und die Frage nach den Gefahren und Möglichkeiten der neuen technischen Steuerungs-, Informations- und Kommunikationsmedien zuordnet. Die Auseinandersetzung mit Schlüsselproblemen soll anhand exemplarischer Beispiele erfolgen, an denen Kritikbereitschaft und -fähigkeit, Argumentationsbereitschaft und -fähigkeit, sowie Empathie und vernetztes Denken ausgebildet werden können.

Klafki betont [Kla2, S. 155], dass das im exemplarischen Verfahren Angeeignete einer Übung, Wiederholung und Anwendung bedarf. Das zuvor Erlernte soll sich bei der Erarbeitung eines neuen Themas als notwendig erweisen.

Kommen wir nun also zu der von Wagenschein begründeten Didaktik des Exemplarischen, Typischen, Repräsentativen und Elementaren. Was versteht Martin Wagenschein unter dem Begriff des exemplarischen Lehrens, für den er sich Zeit seines Lebens engagierte?

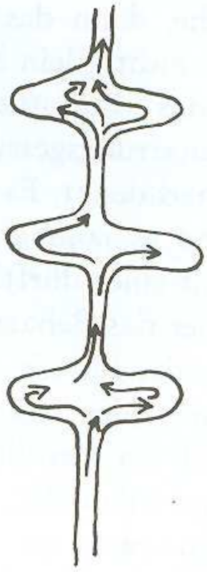
Der Begriff „exemplarisch“ wird vom Verbum „eximere“ abgeleitet, welches so viel wie „herausnehmen“ bedeutet. Das Exemplar kann ein Muster oder aber auch ein Vorbild sein. Wie Wagenschein diese Begriffe mit dem Unterricht, mit der Lehre verbindet, sei hier kurz dargelegt.



Wagenschein beginnt seine Ausführungen zum exemplarischen Lehren mit der Darstellung eines Unterrichts, von dem man sich entfernen müsse. Diese Art des Unterrichts nennt er „Lehr-Gang“ [Wa, S. 28] und meint damit einen systematisch und linear aufgebauten Unterricht, der zur Vollständigkeit verführt, da er Wissen bereitstellen will. Der Wunsch nach Vollständigkeit resultiert aber zumeist in Hast und Ungründlichkeit. Übertrieben formuliert, führt ein derartiger Unterricht zu einem „imposanten Schotterhaufen“ [Wa, S. 29].
Die Systematik an die man sich in einem solchen Lehrgang klammert, verstopft aber den Durchblick (Bild I). Da Bildung aber kein additiver Prozess ist, verschafft die subtraktive Ausdünnung bzw. Auskämmung (Bild II) auch keine Abhilfe.

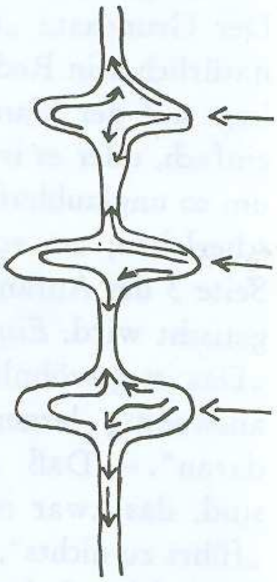
Wagenschein empfiehlt das intensive Verweilen bei begrenzten Ausschnitten, die er Plattformen nennt, deren Errichtung die Anwendung von Auswahlprinzipien und eine Beschränkung auf das Wesentliche verlangen.

Eine brauchbare Form des Lehrgangs wird einerseits durch Mut zur Lücke und andererseits Mut zur Gründlichkeit an bestimmten Abschnitten erreicht (Bild III). Die errichteten Plattformen gleichen Brückenpfeilern oder Staustufen [Wa, S. 31]. Es wird aber immer noch das Ganze durchlaufen, jetzt aber eben von Plattform zu Plattform, und dazwischen liegen sorgfältig ausgewählte Verbindungen.



III

IV



III'

Auch diese Form des Unterrichts ist nicht die von Wagenschein intendierte, da bisher nur die Objektseite des Wissens und noch gar nicht die Subjektseite des Kindes, der Lernenden berücksichtig wurde.

Um das Exemplarische im Sinne Wagenscheins zu begreifen, muss das Bild der Plattform verlassen werden. Denn er meint: „*Das Einzelne, in das man sich versenkt, ist nicht Stufe, es ist Spiegel des Ganzen.*“ [Wa, S. 32], er will das Einzelne also nicht als Stufe oder als Vorstufe, sondern als Schwerpunkt verstanden wissen. Das Einzelne, so Wagenschein, erhellt (das Ganze), strahlt es an und regt das Fernere und doch Verwandte durch Resonanz an (Bild IV). Um nun aber auch der Subjektseite gerecht zu werden, fordert er, dass auch diese Prozesse eine Ballung der Aktivität des Kindes sein müssen. „*Sie (die Aktivitäten) müssen eindringlich und inständig sein, in die Sache hinein und in den Seelengrund der Lernenden hinein*.“ [Wa, S. 34].

Zum Abschluss hebt Wagenschein noch die Bedeutung des Einstiegs hervor und empfiehlt, bei einem Problem zu beginnen, das der ersten Plattform entspricht, sodass ohne bereitgestellte Vorkenntnisse in ebendiese eingestiegen werden kann. Dabei ist ihm wichtig, nicht „unten zur Tür“ hereinzukommen [Wa, S. 34]. Mit einer herausfordernden Frage soll die Spontanität des Kindes angeregt werden und aufgrund der zu leistenden Gedankenarbeit wird ein Vordringen zu „den Elementen“ [Wa, S. 35] und zu „den komplizierteren Fragen“ [Wa, S. 35] möglich sein. Mit weiteren Einstiegen soll sich dieses Verfahren dann auf einer jeweiligen höheren Stufe wiederholen (Bild III’). Die schwierige Aufgabe der Lehrenden wird es sein, ein Ausgangsproblem zu wählen, das weder zu sehr noch zu wenig komplex ist. Ein möglicher Ausweg könnte die Auswahl mehrerer Ausgangsprobleme sein.

Nach Wagenschein gilt für das Verhältnis des Exemplarischen zum Einstieg [Wa, S. 36 f.]:

> „Das exemplarische Verfahren – in seiner reinen Form – hat das [den Stufenbau, von Plattform zu Plattform] nicht, es kann auf ein einziges ausstrahlendes Problem sich beschränken. Es *hat nicht Stufencharakter*, aber auch bei ihm wird in das Problem ohne Vorbereitung hineingesprungen. […] Wohl aber kann der Einstieg (obwohl er den Stufenbau im Sinne hat) zugleich *exemplarisch* sein. (So wie ein Ofen gleichzeitig nicht durch den Transport der Luft sondern auch durch die Strahlung in die Weite wirkt.)“

Lassen sich nun exemplarische Themen eines Faches angeben? Wagenschein verwehrt sich gegen einen „*Katalog exemplarischer Stoffe*“ [Wa, S. 38], denn auch bei den Lehrenden ist ein Ergriffensein nötig und dies entsteht aber zweifelsohne individuell. Es ist aber schon oft und von vielen versucht worden, so genannte zentrale bzw. fundamentale Ideen für die Mathematik anzugeben. So hat beispielsweise auch Fritz Schweiger einen solchen Katalog aufgestellt, wenngleich er sich „*der Unmöglichkeit, einen definitiven Katalog aufstellen zu können, noch schmerzlicher bewusst war (…)!*“ [Schw, S. 206]. Nach Schweiger ist eine fundamentale Idee ein „*Bündel von Handlungen, Strategie und Techniken, die*

(1) *in der historischen Entwicklung der Mathematik aufzeigbar sind,*
(2) *tragfähig erscheinen, curriculare Entwürfe vertikal zu gliedern,*

(3) *als Idee zur Frage, was ist Mathematik überhaupt, zum Sprechen über Mathematik, geeignet erscheinen,*
(4) *den mathematischen Unterricht beweglicher und zugleich durchsichtiger machen können,*
(5) *in Sprache und Denken des Alltags einen korrespondierenden sprachlichen oder handlungsmäßigen Archetyp besitzen.*“ [Schw, S. 207].

Im Sinne des Spiralprinzips sollen die Schüler/innen den fundamentalen Ideen immer wieder im Unterricht begegnen, also auf steigenden Niveaus, sodass diese wie ein roter Faden jenen durchziehen.

Eng verbunden mit Wagenscheins Konzept des exemplarischen Lehrens ist auch seine Idee des „Genetischen Lehrens“, das durch die Dreiheit genetisch-sokratisch-exemplarisch gekennzeichnet ist [Wa, S. 75]. Die sokratische Methode ist für ihn wichtig, weil sich das Erwachen der geistigen Kräfte am besten im Gespräch vollzieht. Das exemplarische Prinzip ist inhärenter Teil des genetischen Lehrens, weil letzteres sich auf exemplarische Themenkreise beschränken muss und auch kann. Umgekehrt muss aber ein exemplarisches Verfahren auch immer genetisch sein. Ferner darf ein genetischer Lehrgang nicht darlegen, sondern muss entdecken lassen.

Werner Sanns hat sich in seiner Dissertation ebenfalls sehr intensiv mit dem genetischen Lehren auseinandergesetzt und hat sich dort die Frage gestellt, ob die nach einer genetischen Methode durchgeführte Lehrveranstaltung zur Mathematik an Fachhochschulen gegenüber traditionellen Methoden wesentliche Vorteile für Studierende hat und ob eine multimediale Lernumgebung von den Studierenden positiv angenommen und gewinnbringend eingesetzt werden kann [San, S. 12].

Er unterscheidet in seiner Arbeit verschiedene Teilaspekte der genetischen Methode [San, S. 22 ff.], die hier ergänzend angeführt sind:

(6) *Historisch-genetischer Aspekt:* Genetisch entspricht hierbei der historischen Genese, also dem Werden der Theorie.
(7) *Psychologisch-genetischer Aspekt:* Dieser bezieht sich auf den Entwicklungsstand der Lernenden. Neues Wissen soll sorgfältig an das Vorver-

ständnis anschließen und die Eigentätigkeit beim Entdecken ist ein wesentliches Kriterium.

(8) *Sachlogisch-genetischer Aspekt:* Die Lerninhalte müssen ihrem sachlogischen Zusammenhang entsprechen.

(9) *Sokratisch-genetischer Aspekt:* Lehrer/innengespräche, die in sokratischer Form Wissen entdecken lassen, sind Mittel zur Erfahrung und Vertiefung in mathematische Inhalte.

(10) *Exemplarisch-genetischer Aspekt:* Anhand eines einzelnen Beispiels muss das Charakteristische des Ganzen sichtbar werden können.

Für Sanns ist wichtig, dass beim genetischen Lehren einer mathematischen Theorie deren Entstehungsprozess Vorrang vor dem fertigen Theoriegebäude hat, die zentralen und fundamentalen Ideen einer solchen Theorie sieht er als Pfeiler und roten Faden, der den Studierenden als Orientierung dienen soll. Ferner versucht er seine Lehrveranstaltung auf bekannten, anschaulichen Dingen aufzubauen, das Vorverständnis der Studierenden zu berücksichtigen und sie langsam zu strengeren Überlegungen hinzuführen. Dabei sind die Motivation und Eigentätigkeit der Studierenden bedeutende Faktoren und die benötigte Mathematik wird erst zum Zeitpunkt des wirklichen Bedarfs – also nicht auf Vorrat – erlernt.

Auch hier wären Einschränkungen anzubringen. Ein Unterricht, der die benötigte Mathematik erst zum Zeitpunkt des Bedarfs liefert, würde auf eine „Anlassgesetzgebung" hinauslaufen, in der große mathematische Zusammenhänge zerrissen oder gar nicht thematisiert und dadurch Verständnisprozesse gerade erschwert werden.

In seiner Arbeit untersucht er drei Kurse, wobei der erste in herkömmlicher Form stattfand, der zweite in Form des genetischen Lehrens und im dritten wurde das genetische Lehren durch eine multimediale Lernumgebung unterstützt. Die Frage, ob den Studierenden die neu erlernten Begriffe gelungen vermittelt wurden und ob sie im Stande wären, anderen Studierenden diese „umfassend – nur vage – gar nicht" erklären zu können, wurde von 64% der Teilnehmer/innen aus Kurs 3 mit „umfassend" und von 36% der Teilnehmer/innen aus Kurs 3 mit „nur vage" beantwortet. Bei Studierenden der Lehrveranstaltung, die im Sinne des genetischen Lehrens, aber ohne Lernumgebung konzipiert war, gaben 20% an, die Begriffe umfassend, 50% die Begriffe nur vage und 30% die Begriffe gar nicht erklären zu können. Die traditionell geführte Lehrveranstaltung zeigt hier mit 12, 59 und 29 Prozent kaum andere Ergebnisse als die zweite Form [San, S. 74].

Bemerkenswert ist auch, wie sich das Interesse der Studierenden an der Lehrveranstaltung gesteigert hat. 65% der Studierenden bezeichnet den traditionellen Kurs als interessant, beim genetisch orientierten gaben diese immerhin schon 95% der Studierenden an und im genetischen Kurs mit zusätzlicher computerunterstützter Lernumgebung bekundeten 100% die Interessantheit der Vorlesung [San, S. 72].

Die Leistungen bei den Klausuren der drei Kurse sind nahezu gleich, weisen aber eine steigende Tendenz von Kurs 1 zu Kurs 3 auf. Die Leistungsdichte[1] ist jedoch bei Kurs 2 am höchsten [San, S. 78].

Werner Sanns meint, dass die Ergebnisse der Evaluation zeigen, dass die genetische Methode an Fachhochschulen insgesamt von Vorteil ist und dass der Einsatz einer computergestützten Lernumgebung weitere positive Effekte hervorbringt [San, S. 81]. Bei der Konzeption seiner Lernumgebung stand die Wiederholung des in der Lehrveranstaltung neu erworbenen Wissens im Vordergrund, weiters konnten die Studierenden auf ein Computeralgebrasystem zugreifen und Foren sowie E-Mail zu Kommunikation nützen.

Die Ergebnisse dieser Studie sind überaus bemerkenswert, allerdings sei vorweggenommen, dass gerade die vorliegende Arbeit zeigen wird, dass Lernumgebungen bei entsprechendem Design weit mehr als nur zur Wiederholung eines bereits erworbenen Wissens beitragen können.

Bei Vollrath [Vol1, S. 3 ff.] kann eine weitere Fülle von Namen und Werken nachgelesen werden, die alle auf Martin Wagenscheins Ideen verweisen, dabei merkt der Autor an, dass vieles, was Wagenschein forderte, bis heute noch nicht umgesetzt wurde.

Zum Abschluss dieser ausführlichen bildungstheoretischen Überlegungen möchte ich Klafki ein weiteres Mal zu Wort kommen lassen und sein Verständnis von Bildung kurz skizzieren.

[1] Sanns zieht zur Leistungsmessung ein Punktesystem heran. Die Mediane sind bei allen drei Kursen nahezu gleich. Die Quartilsabstände sind bei Kurs 2 am kleinsten, in diesem Sinne spricht er von „Leistungsdichte".

Bildung soll laut Klafki [Kla1, S. 46 ff.] letztlich eine Haltung sein, die mit den Worten Verantwortungsbewusstsein und Verantwortungsbereitschaft beschrieben werden kann und Bildung soll bei Entscheidungen helfen. Die Voraussetzungen für gelebte Verantwortungsbereitschaft sind Engagement und Reflexion.

Für Klafki bedeutet Verantwortungsbereitschaft, dass ein junger Mensch bereit ist, mehr zu tun, als die Gesetze von ihm verlangen. Handeln ist für Klafki eine Form von Aktivität, „*in der der Mensch in diesen Raum des Mit-anderen-Menschen-Seins hineinwirkt*“ [Kla1, S. 50]. Daher wirkt Handeln auch immer auf die Gesellschaft und steht in engem Zusammenhang mit Sprache. Denn Handeln ist nicht nur an Sprache gebunden, sondern bedarf sprachlicher Interpretation. Die jeweiligen Intentionen können nur mittels Sprache transportiert werden. Handeln bedeutet aber auch Festlegung und Beschränkung auf eine von vielen Möglichkeiten. Handeln wirkt jedoch auch immer auf andere und somit ist die Reflexion von Handlungen und deren Wirkung erforderlich. Daher müssen das Handeln und die Einschätzung der daraus resultierenden Konsequenzen einen großen Platz im Bildungsbemühen einnehmen, insbesondere dann, wenn Bildung den jungen Menschen anleiten soll, sich in seiner Wirklichkeit zurechtzufinden.

Die Schwierigkeiten, wie Engagement und Reflexion im Raum der Bildung realisiert werden können, scheinen für Klafki offensichtlich. Es gibt in der Schule nur wenige Möglichkeiten Engagement und Verantwortungsbereitschaft zu zeigen und nur wenige jungen Menschen nehmen diese Möglichkeiten wahr. Die Aufgabe der Schule ist es, zukünftige Verantwortung aufzuzeigen, Erlebtes reflexiv zu erhellen und auf außerschulische Bereiche auszulegen. Schüler und Schülerinnen sollen Verantwortung übernehmen, zeitweilig den Schonraum Schule verlassen und Ernsterfahrungen sammeln. Danach kehren sie in die Schule zurück und reflektieren ihre Erfahrungen. Trotz der Schwierigkeiten, die sich bei der Verwirklichung solcher Konzepte ergeben, muss Verantwortungsbereitschaft ein unabdingbares Moment der Bildung sein. Erziehung zur Verantwortung ist nur über den Weg der Erfahrung möglich und Schule kann diese Aufgabe nicht mehr von sich weisen. Schule muss sich öffnen, damit Engagement und Reflexion in ihren bisherigen Aufgabenzusammenhang integriert werden kann.

Das derzeitige österreichische Schulsystem sieht kaum die Möglichkeit vor, dass Schüler und Schülerinnen ihren Schonraum verlassen und Ernsterfahrungen sammeln, es ist jedoch durchaus vorstell- und machbar, den Schülern und Schülerinnen zukünftige Verantwortungen aufzuzeigen. So lässt sich sicher für jede Alters- und Könnensstufe mindestens ein mathematischer Inhalt finden, der auf außerschulische Bereiche ausgelegt werden kann und der geeignet ist, Verantwortungsbewusstsein, Verantwortungsbereitschaft und Engagement zu schulen. Bereits die Prozentrechnung eignet sich für derartige Ziele. So kann beispielsweise eine Unterrichtssequenz, welche die Prozentrechnung mit der gesunder Ernährung und der ihr zugrunde liegenden Ernährungspyramide verbindet, durchaus dazu führen, dass sich manche Schüler und Schülerinnen bewusster und verantwortungsvoller mit Ernährung und Lebensmitteln auseinandersetzen.

3.2.3 Kritische Anmerkungen zu Klafkis bildungstheoretischen Aspekten

In diesem Abschnitt möchte ich – wie ich es bereits in Abschnitt 3.1.9 gemacht habe – meine kritischen Anmerkungen zu Klafkis bildungstheoretischen Aspekten pointiert zusammenfassen.

Vergangenes – Gegenwart – Zukunft

Zu Beginn meiner Ausführungen in Abschnitt 3.2 habe ich die zeitliche Einbindung von Bildung und Erziehung dargelegt. Genauer: Bildung und Erziehung sollen nach Klafki vor dem Hintergrund der Trias von Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft gesehen werden [Kla1, S. 9]. Die Tatsache, dass aber zum einen nur wenige mathematische Inhalte der kindlichen Gegenwart inhärent sind und zum anderen manch tradierte Inhalte den Schüler/innen den Mut zur eigenen mathematischen Zukunft nehmen, bedeutet, dass wir mit dieser Trias im Mathematikunterricht sorgsam umgehen und einiges an Ideen für deren methodische und inhaltliche Realisierung aufbringen müssen.

Zum Transfer von Denkleistungen

Klafkis kritische Auseinandersetzung mit der Theorie der funktionalen Bildung [Kla1, S. 33 ff.] hat mich in meiner Arbeit zur Frage des Transfers von Denkleistungen innerhalb aber auch außerhalb der Mathematik geführt. Dass dieser Transfer schwierig ist, zeigen einmal mehr aktuelle Studien (vgl. Heinze) aber auch meine eigenen bereits geschilderten Unterrichtserfahrungen. Dass diesen Schwierigkeiten eventuell mit verstärkt fächerübergreifendem Arbeiten beigekommen werden kann, sei hier nochmals erwähnt. Möglicherweise kann aber auch das E-Portfolio, gedacht als Lernportfolio, das beim selbstorganisierten Lernen und bei Reflexionsprozessen unterstützt, den Transfer von Denkleistungen fördern.

Methodentraining
Die Methoden des Wissenserwerbs haben zweifelsohne für Schüler und Schülerinnen große Bedeutung. Denn wenn anstelle von Belehrung und Unterweisung Selbstständigkeit und Selbsttätigkeit gefordert sind, dann müssen die Schüler und Schülerinnen Lern- und Arbeitstechniken erwerben, die ihnen Selbstständigkeit und Selbsttätigkeit ermöglichen [Kli, S. 18]. Ein Training der Methoden ohne Inhalt ist wenig sinnvoll. Vielmehr muss das Methodentraining (für den Mathematikunterricht) an mathematischen Inhalten erfolgen. Auch belegt meine eigene Unterrichtserfahrung, dass die Methodenvielfalt der Lehrenden und die daraus resultierende Methodenkompetenz der Schüler und Schülerinnen positive Auswirkungen auf den Wissenserwerb haben.

3.2.4 Österreichische Bildungs- und Allgemeinbildungskonzepte

Die österreichische Diskussion über Bildungs- und Allgemeinbildungskonzepte in den letzten 20 Jahren ist vor allem von zwei Personen sowie deren diesbezüglicher Ideen geprägt worden. Hans-Christian Reichel und Roland Fischer haben in ihren Schriften wesentliche Beiträge zur Diskussion über mathematische Bildung und Allgemeinbildung geliefert. Die Denkmodelle beider wurden in zahlreichen Abhandlungen aufgegriffen, wobei Edith Schneider und Werner Peschek vornehmlich die Grundgedanken von Roland Fischer in Arbeiten aufgenommen haben.

Reichel geht bei seinen Überlegungen, was Erziehung und Bildung ausmacht, bis in die Antike zurück. Er weist darauf hin, dass schon seit damals überlegt wird, was Erziehung und Bildung ist, welche Inhalte unterrichtet werden sollen. Bereits Plato verwendete die Mathematik als didaktisches Mittel zur Erklärung seiner Philosophie [Re2, S. 114] und er (Plato) meint, dass Politiker in Arithmetik und Geometrie geschult werden müssen, da dies zumindest deren Sprache und Ausdrucksvermögen verbessern würde [Re3, S. 11]. Ferner gelingt es Reichel nachzuweisen, dass viele Theologen und Philosophen die Denkweisen der Mathematik als Paradigma und Propädeutik der Philosophie benützen.

Bildung ist für Reichel etwas Wesentliches [Re2, S. 113], wenngleich der Begriff für ihn schwer zu definieren und unscharf zu sein scheint, aber dafür unbestritten umso interessanter ist. Konstitutive Aspekte für Bildung sind nach Reichel [Re2, S. 116] die „mathematische Denkweise“, die Fähigkeit zur Abstraktion und zum formalen Denken. Das zugrunde liegende Bild von Mathematik orientiert sich zum einen an den mathematischen Modellen und zum anderen an der Art und Weise, wie in der Mathematik Begriffe gebildet werden.

Mathematische Modelle können zur Formulierung und Lösung von Problemen aus Wissenschaft und Technik beitragen, mathematische Begriffe werden gelegentlich aus Alltagsbegriffen gebildet und verlieren oder verändern im Zuge der Begriffsbildung ihre Alltagsbedeutung, dadurch werden sie oft erst für die Mathematik arbeitsfähig gemacht.

In der Schule kann dieses Bild von Mathematik durch eine Dreiteilung nämlich – Übersetzen eines Problems in die Sprache der Mathematik – Lösung durch mathematisches (formales) Vorwissen und Wissen – Rückübersetzung – vermittelt werden.

Reichel ist zudem davon überzeugt, dass der Mathematikunterricht in einer ganz spezifischen aber wichtigen Weise [Re3, S. 2] zur Persönlichkeitsbildung, zur Erziehung und zum Mensch-Sein beiträgt. Die Legitimation des Mathematikunterrichts müsse so Reichel auf folgenden Ebenen diskutiert werden:

- Wie sieht es mit der praktische Verwendbarkeit und dem Einsatz der Mathematik im täglichen Leben aus?
- Soll die Schule möglichst viele der bestehenden „Welten“ widerspiegeln und damit auch die Welt der Mathematik, die schon rund 2500 Jahre existiert?
- Ist die Mathematik Teil einer Bildung, in der es darum geht, den eigenen Standpunkt in der „Welt“ bestimmen zu können?
- Wie wirken Mathematik und ein jahrelanger Mathematikunterricht auf die Persönlichkeit des Menschen?

Auf all diese Fragen finden wir Antworten in verschiedenen seiner Texte, manche wurden von mir schon in anderen Abschnitten dieser Arbeit vorgestellt. Nun möchte ich mich aber speziell der letzten Frage, der Frage nach der Persönlichkeitsbildung durch den Mathematikunterricht, ein wenig ausführlicher widmen.

Eine der Thesen lautet: „*Jedes Fach trägt in spezifischer Weise zur Persönlichkeitsbildung bei, (…). Jedes Fach vermittelt gewisse Haltungen, Sicht-, Sprach- und Denkweisen.*“ [Re3, S. 3].

Insbesondere hat jedes Fach auch seine eigenen Denkrahmen und Vorgaben, mit denen es Probleme bearbeitet. So kann beispielsweise das Thema AIDS oder das Klima-Problem durch die *historische*, *juridische*, *biologische* und *mathematische* „Brille“ betrachtet werden. Erst ein Zusammenwirken all dieser „Brillen“ macht für Reichel Allgemeinbildung aus [Re3, S. 3]. Typisch für die Mathematik ist das Einbringen von Größen und Variablen, von Zahlen, Gleichungen und grafischen Darstellungen. Dies sowie das Messen und die Messbarkeit an sich, vor allem aber auch das funktionale Denken, prägen nach Ansicht Reichels unsere mathematische Weltsicht. Es ist weiters durchaus denkbar, dass logisch-formale Vorgehensweisen und damit der Ausschluss persönlicher Befindlichkeiten zu einer rationalen Distanz beitragen und damit persönlichkeitsbildendend wirken.

Eine weitere These, deren Kommentierung und nähere Erläuterung mir völlig unnötig erscheint, lautet: „*Abstraktion und Idealisierung sind das tägliche Leben der Mathematik und dadurch wirkt sie auf den Menschen!*“ [Re3, S. 4]. So kann beispielsweise der Geometrieunterricht durch das Idealisieren alltäglicher Gegenstände nicht ohne Auswirkungen auf das Weltbild der Schüler/innen gesehen werden [Re3, S. 4].

Die strukturtheoretischen und algorithmischen Wesenszüge der Mathematik tragen ebenso zur Auseinandersetzung mit der realen Welt und dem Verständnis derselben bei, wie die Denkschulung im Mathematikunterricht, die u. a. lehrt, in einer gewissen Art und Weise an Probleme heranzugehen. Diese Strategien können auch bei zahlreichen außermathematischen Problemen von Vorteil sein und Reichel sieht darin den Grund, dass viele Firmen die Mathematik für wichtig erachten und sogar eigene Mathematikabteilungen besitzen [Re3, S. 5].

Ferner ist Reichel davon überzeugt, dass die Mathematik und der Mathematikunterricht auch auf die persönliche Alltagssprache jedes Einzelnen wirken [Re3, S. 10], denn das

Denken im Mathematikunterricht erfolgt in definierten Begriffen und Definitionen sind mitentscheidend für das Argumentieren. Definitionen sind aber auch für das Denken und Sprechen ganz allgemein wichtig, womit für Reichel die Bedeutung der Sprache und des Sprechens im Mathematikunterricht feststeht.

Zur Rolle der Mathematik beim Bilden von Begriffen und Vorstellungen äußerst sich Reichel ebenfalls mehrere Male. Er [Re1, S. 5] und Günter Graumann [Gra, S. 56] sind davon überzeugt, dass ein wesentliches Merkmal des Menschen darin liegt, seine Welt mit Begriffen zu ordnen, um bestimmte Phänomene zu verstehen und Orientierung für spätere Handlungsweisen zu haben. Die Denkweise der Naturwissenschaften, der Mathematik kann und soll in einem allgemein bildenden Mathematikunterricht eine konstituierende Funktion innehaben. Die charakteristischen Merkmale mathematisch-naturwissenschaftlichen Denkens sind nach Reichel [Re1, S. 5] das Strukturieren, Ordnen, Systematisieren, Abstrahieren, Arbeiten mit Hypothesen und das Bemühen um Verallgemeinerung. Das sinnvolle und zweckmäßige Erfassen der Dinge durch Begriffe stellt eine zentrale Aufgabe der Mathematik dar, im Unterricht sollen darüber hinaus aber auch die Grenzen des mathematisch Erklär- und Entscheidbaren angesprochen werden.

Ein weiterer Gesichtspunkt, den es nach Reichel zu berücksichtigen gilt, ist der Einfluss der Mathematik und des Mathematikunterrichts auf das Sprachbewusstsein. Er stellt einerseits eine Förderung sprachlicher Fähigkeiten durch Mathematik und andererseits die Förderung mathematischer Fähigkeiten durch Sprachschulung fest [Re3, S. 11]. Weiters betont er die Haltung bzw. den Stellenwert, den man so genannten „Expertenmeinungen“ entgegenbringt. Der diesbezügliche persönlichkeitsbildende Beitrag der Mathematik besteht vor allem darin, dass Schüler und Schülerinnen gelernt haben, abzuwägen, welchen Behauptungen von Experten/Expertinnen man zustimmen oder warum man sie ablehnen kann. Dieses Ziel von Bildung bzw. Allgemeinbildung ist auch für Roland Fischer ein wesentliches, wenngleich es ihm, wie die folgenden Ausführungen zeigen, um mehr geht.

Fischer meint [Fi1, S. 9 ff.], dass die Inhalte der Oberstufe der Höheren Schule nicht eindeutig festgelegt sind, wenn man sich an den von ihm vorgestellten Prinzipien „Kommunikationsfähigkeit“, „Grundwissen“ und „Reflexion“ orientiert. Erst die Ergebnisse eines Aushandlungsprozesses zwischen Experten/Expertinnen und der Gesellschaft sollen festlegen, was man wissen und verstehen muss.

Kommunikationsfähigkeit – hier also Kommunikation mit Experten/Expertinnen und der Allgemeinheit – ist für Fischer ein vorrangiges Ziel von Allgemeinbildung [Fi1, S. 1 ff.].

Die in einem Fach zu erwerbenden Kompetenzen teilt R. Fischer [Fi1, S. 5] in die drei Bereiche „Grundwissen", „Operieren" und „Reflexion" ein. Für den/die gebildete/n Laien/Laiinnen sind im Gegensatz zum Experten bzw. zur Expertin nur der erste und dritte Bereich relevant. Grundwissen ist für die Kommunikation mit Experten/Expertinnen und Reflexion für die Beurteilung der von Experten/Expertinnen erstellten Gutachten wichtig.

Weiters vertritt R. Fischer [Fi2, S. 10] die These, dass im Mathematikunterricht der gymnasialen Oberstufe „Handlungskompetenz", gemeint ist die Kompetenz für konkrete Handlungen oder die Verhaltenskompetenz in verschiedenen Lebenssituationen, nur im Hinblick auf „Kommunikations- und Entscheidungshandlungen" erreicht werden kann. R. Fischer begründet diese These damit, dass in der Schule vorwiegend Kommunikationshandlungen durchgeführt werden, falls zudem Reflexion geübt und die Erarbeitung eines eigenen Standpunktes gefördert wird, können daraus Entscheidungshandlungen resultieren.

Allgemeinbildung inkludiert nach Fischer [Fi2, S. 11] nicht nur Handlungskompetenz, sondern auch „Weltverständnis" bzw. „Wahrnehmungskompetenz". Die naturwissenschaftlichen Grundlagendisziplinen haben einerseits die Aufgabe, eine Basis für Anwendungen zu liefern, andererseits aber sollen sie auch Weltbilder anbieten und diese selbstreflexiv kritisieren, damit die Anwendungsdisziplinen kritisch begleitet werden können. Reflexion ist aber nur möglich, wenn der Gegenstand der Betrachtung in seinem theoretischen Zusammenhang dargestellt wird. Ein theorieorientierter Unterricht, der auch die Kritik an den Theorien beachtet, ist für Fischers Verständnis von Allgemeinbildung relevant [Fi2, S. 12], da verstehbare theoretische Ansätze das Vertrauen in die Experten/Expertinnen stärken, diese gleichzeitig aber auch kritisierbar machen.

3.3 Einige Anmerkungen zu der Debatte um die Bildungsstandards

Im vorhergehenden Text habe ich gelegentlich auf die österreichischen Bildungsstandards für den Mathematikunterricht verwiesen. In diesem Abschnitt möchte ich nun abschließend einige Gedanken und Anmerkungen zu der Debatte um die Standards aufgreifen und ein wenig detaillierter als bisher ausführen.

Standards werden von den österreichischen Entwicklern bzw. Entwicklerinnen als Kompetenzen betrachtet, die den gewünschten Bildungsertrag beschreiben. Als Standards bezeichnen sie jene mathematischen Teilkompetenzen, die in ihrer Gesamtheit als grundlegender Bildungsertrag der Sekundarstufe I zu erwarten sind [bm:bwk1, S. 3]. Weiters wird erhofft, dass Lehrer/innen Standards auch als Instrument zur Planung, Durchführung und Reflexion des Unterrichts heranziehen [bm:bwk2, S. 14]. Überdies sollen die entwickelten Standards den Beitrag des Faches Mathematik zur Bildung nachweisen, obwohl die Autoren und Autorinnen zugeben, dass die Bildungsaufträge eines Faches bereits in den Lehrplänen zu finden sind.

Dass ich, wenn es um Bildung und insbesondere Allgemeinbildung geht, auf Heymann vertraue, haben die vorangegangenen Abschnitte gezeigt. Ergänzen möchte ich hier nun noch folgenden Aspekt, der sich im Zusammenhang mit der Theorie der funktionalen Bildung (vgl. Abschnitt 3.2.2) erschließt:

Das Wesentliche der funktionalen Bildung ist, kurz gesagt, die „*Formung, Entwicklung, Reifung von körperlichen, seelischen und geistigen Kräften*“ [Kla1, S. 33]. Deutet man die „geistigen Kräfte“ als fachliche und/oder überfachliche Kompetenzen, so ergibt sich die Verbindung zum Kompetenzmodell der Bildungsstandards von selbst. Denn die Bildungsstandards für Mathematik am Ende der 8. Schulstufe beruhen auf einem Kompetenzmodell, welches Kompetenzen als kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten verstanden wissen will [bm:bwk2, S. 20]. Hierbei unterscheiden die Autor/innen im Wesentlichen zwei Dimensionen, denn die dritte, die Komplexitätsdimension, bezieht sich bloß auf den anzustrebenden Schwierigkeitsgrad der Aufgabenstellung bzw. auf den zu erreichenden Level und wird von mir hier nicht näher beschrieben. Die beiden Dimensionen, auf die ich nun detaillierter eingehen werde – das sind die Handlungsdimension und die inhaltliche Dimension – sollen nach Meinung der Autoren bzw. Autorinnen eine sinnvolle Verknüpfung erfahren.

Die Handlungsdimension hat ihre Ausprägungen im Darstellen, Modellieren, Operieren, Rechnen, Interpretieren, Dokumentieren, Argumentieren und Begründen, die *inhaltliche Dimension* umfasst das Arbeiten mit Zahlen, Maßen, Variablen, funktionalen Abhängigkeiten, Figuren, Körpern, statistischen Kenngrößen und Darstellungen. Beide Dimensionen enthalten eine Fülle zentraler mathematischer Ideen, die ihre Wurzeln schon bei Whitehead, Bruner, Jung, Vollrath, Schreiber, Tietze und Baireuther haben (vgl. beispielsweise [Hey, S. 158 ff.]).

Die Autorinnen und Autoren gehen davon aus, dass Schüler und Schülerinnen genau dann über eine bestimmte Kompetenz verfügen, wenn sie verschiedene Ausprägungen der Handlungsdimension in wechselnden Situationen aktivieren und mit der situationsrelevanten Ausprägung der inhaltlichen Dimension angemessen verbinden können [bm:bwk2, S. 22].

Es sind also die „*geistigen Kräfte*" oder kognitiven Fähigkeiten an der inhaltlichen Dimension zu bilden und zu messen, im Endeffekt soll ein Transfer dieser Leistungen und Fähigkeiten zwischen verschiedenen Inhalten zumindest innerhalb der Mathematik erreicht und gewährleistet werden. Dass die Übertragung von Fähigkeiten und Kompetenzen selbst innerhalb der Mathematik schon als äußerst schwierig erscheint, hat Heinze am Beispiel der Problemlösekompetenz nachgewiesen [Hei].

Nun versteht das den Standards zugrunde liegende Kompetenzmodell seine Kompetenzen ja als ausschließlich mathematische, die sich lediglich auf mathematische Inhalte beziehen. Eine Reduzierung der Kompetenzen Darstellen, Modellbilden, Interpretieren, Dokumentieren, Argumentieren und Begründen auf rein mathematische erscheint mir im Sinne eines allgemein bildenden Ansatzes – trotz der schon aufgezeigten Transferschwierigkeiten – nicht zweckmäßig. Dies mag auch darin begründet sein, dass die im Standardprojekt enthaltenen Kompetenzen keinen Beitrag zur Allgemeinbildung, sondern bloß einen Beitrag zur Bildung und eine Rechtfertigung des Faches Mathematik im Fächerkanon leisten wollen.

Ob wenigstens dies gelingen wird, vermag ich derzeit nicht zu beurteilen. Sollte das Fach Mathematik wirklich einer Rechtfertigung bedürfen, dann würde ich Heymanns Worte wählen, für den ein entscheidender Beitrag des allgemein bildenden Mathematikunterrichts darin besteht, „(…) *die besondere Universalität der Mathematik und ihrer*

Bedeutung für die Gesamtkultur anhand zentraler Ideen exemplarisch erfahrbar zu machen.“ [Hey, S. 158]. Wenn es gelingt, die Universalität und Allgemeingültigkeit der Mathematik im Unterricht für Schüler und Schülerinnen erfahrbar und begreifbar zu machen, dann kann möglicherweise erreicht werden, dass die im Mathematikunterricht erworbenen Kompetenzen und kognitiven Fähigkeiten auch in anderen Fächern als wichtig und bedeutsam anerkannt und dort gleichermaßen allerdings adaptiert auf die entsprechenden Inhalte angewandt werden, wenn auch die Lehrkräfte dieser anderen Fächer diese wichtige Einsicht kompetent unterstützen. Eine solche gelungene Symbiose stellen beispielsweise die fächerübergreifenden Projekte Mathematik-Physik am BRG Kepler in Graz dar: „Mathematik und Physik koordiniert unterrichten“ von Gerhard Rath und Waltraud Knechtl[2], ein IMST3-Projekt vom MNI-Fonds gefördert.

Dann bedarf es keiner Rechtfertigung der Mathematik mehr und dann wird vielleicht vernetztes Denken möglich sein, womit wir den Schülern und Schülerinnen ein weiteres Werkzeug zur Hand geben, das ihnen helfen kann, ihre Zukunft, ihre Welt, die von steigender Komplexität und Dynamik gezeichnet ist, zu bewältigen.

4. Aspekte des Begriffs „Verstehen“

In diesem Kapitel möchte ich der Frage nachgehen, welche Aspekte des Verstehens für die Mathematik und den Mathematikunterricht wichtig und bedeutend sind.

Mathematik will „verstanden“ werden, „auswendig lernen“ mathematischer Sachverhalte und Argumente gilt (zu Recht) als verpönt, da es dem Wesen mathematischen Denkens und Tuns widerspricht. Der Begriff des Verstehens (von Mathematik) findet sich an vielen Stellen der didaktischen Literatur. Sucht man jedoch nach einer allgemein anerkannten Definition oder Erklärung dieses Begriffs, so wird diese Suche keine rechten Ergebnisse liefern.

Ich will daher dieses Kapitel mit einem kurzen Rundgang durch die Gefilde des alltagssprachlichen Gebrauchs von „Verstehen“ beginnen und dabei einige grundlegende Unterscheidungen und Abgrenzungen vornehmen. Danach werden Schüler und Schülerinnen zu Wort kommen und dann erst präsentiere ich überblicksartig eine Auswahl der

[2] http://rath.brgkepler.at/ gültig am: 06. Oktober 2007

wichtigsten Zugänge bzw. Theorien zum Begriff des mathematischen Verstehens, die sich in der Literatur finden und wähle abschließend einige wichtige Grundaspekte aus, die im weiteren Verlauf meinen Gebrauch des Verstehensbegriffs leiten sollen.

4.1 Der alltagssprachliche Gebrauch

Beginnen möchte ich damit, mögliche grammatische Fügungen des Verbums „verstehen“ im Alltagsgebrauch anhand einiger Beispiele zu illustrieren. Eine überaus hilfreiche Mind-Map dazu wurde im Seminar Philosophie der Mathematik zum Thema „Aspekte des Begriffs Verstehen“ erarbeitet.

a.) intransitiv:

a1.) ohne Zusatz: „Ich verstehe!“ [als Gesprächseinwurf]

a2.) mit einer Infinitivkonstruktion:

„Sie versteht es, die Menschen einzulullen.“

„Er versteht sich darauf, Zwietracht zu schüren.“

b.) transitiv:

b1.) „Du verstehst mich nicht!“ [als Grundsatzäußerung im Streit zwischen Lebenspartner/innen]

„Ich kann dich leider nicht verstehen.“ [akustisch]

„Die beiden verstehen sich gut miteinander.“

b2.) „Dieses Programm versteht natürlichsprachliche Eingabetexte.“

„Mein Computer versteht heute überhaupt nicht, was ich von ihm will.“

„Das Mittelalter verstand nicht, dass das Feudalsystem einmal den wirtschaftlichen Fortschritt hemmen könnte.“

b3.) „Ich verstehe nichts von Tischlerei.“

„Sie versteht Deutsch/die deutsche Sprache.“

„Die beiden verstehen ihr Handwerk.“

„Ich verstehe nicht, wie sie zu so einem Urteil kommen konnte.“

„Ich verstehe diese Gebrauchsanleitung nicht.“

„Er verstand die Begründung überhaupt nicht."
„Diese Regel verstehe ich nicht."
„Einstein verstand Raum und Zeit als Dimensionen einer einheitlichen Raumzeit."

b4.) „Sie versteht die Relativitätstheorie von Grund auf."
„Ich verstehe dieses Mathematikbuch einfach nicht."
„Diese Vorlesung verstehe ich einfach nicht."
„Die Klasse hat das Lösen von Extremwertaufgaben überhaupt nicht verstanden."
„Verstehst du diese Definition?"
„Verstehst du diesen [mathematischen] Satz?"
„Verstehst du diesen Beweis?"

Bereits diese kurze Beispielsammlung legt einige Folgerungen nahe:

1. Mein Interesse gilt hauptsächlich der transitiven Verwendung!

2. Die Frage, ob ein Computer die (ggf. sprachlichen oder mathematischen) Eingabedaten „versteht", ist eine der spannendsten Grundfragen der Artificial Intelligence, der beispielsweise auch d'Avis [d'Avis] ausführlich nachgeht. Jedoch habe ich im gegebenen Zusammenhang doch wohl eher einzelne Menschen (höchstens vielleicht noch Klassenverbände oder Jahrgänge von Studierenden) als grammatische *Subjekte* des Verbums „verstehen" im Auge, daher scheiden also Verwendungen wie in b2.) für mich aus.

3. Das *Objekt* von „verstehen" betreffend zeigt sich – obwohl Mathematik von der Kommunikation lebt (sowohl im Entstehungs- als auch im Tradierungs-, Unterrichts- und im Anwendungszusammenhang) –, dass wohl auch b1.) nicht das darstellt, worum es mir hier geht.

   Verbleiben also b3.) und b4.): Diesen ist gemeinsam, dass stets Einzelpersonen (oder überschaubare Gruppen) in Subjektfunktionen auftreten. In Objektfunktionen finden sich in b3.) verschiedene Fähigkeiten, Vorgänge und [inhaltlich hier nicht näher spezifisierte] Texte, Regeln, etc., in b4.) mathematische „Gegenstände" auf verschiedenen Ebenen (in einem Fall eine physikalische Theorie). Bei genauerer Betrachtung dieser Beispielsätze zeigt sich:

4. Es ist kaum zu erwarten, dass sich eine brauchbare Definition des Verstehensbegriffs angeben lässt, die in allen Beispielen aus b3.) und b4.) zielsicher greift.

5. Schlimmer noch: Jede, jeder, die bzw. der sich die Grundlagen der Hochschulmathematik angeeignet hat, wird zustimmen, dass passende Erklärungen, was es jeweils heißen soll, eine mathematische Aussage, eine Definition, einen Satz, ein Beispiel, eine Theorie verstanden zu haben, hinsichtlich der Kriterien für „Verstehen" in der Tat sehr verschieden aussehen müssen.

6. Und noch einmal aufgefächert: Der umgangssprachliche Satz „Ich habe diesen Beweis nicht verstanden" kann signalisieren, dass man die Schlüssigkeit der Argumentkette nicht einsieht, da man eine Lücke entdeckt zu haben scheint, oder dass man zwar jeden Einzelschritt als korrekt und die Abfolge der Gesamtheit der Einzelschritte als lückenlos anerkennt, dass man aber nicht sieht, worin die grundlegende Idee des Beweises besteht, dass einem/einer nicht intuitiv einleuchtet, wieso die verwendeten Grundlagen zum bewiesenen Resultat führen (müssen).

Eine eher vorsichtige Herangehensweise an die Begriffsbestimmung von „Verstehen" im mathematischen Kontext scheint also angebracht. Bevor ich nun einige der bekannteren theoretischen Ansätze darstelle, möchte ich aufzeigen, was Schüler und Schülerinnen meiner Klassen meinen bzw. empfinden, wenn sie im Mathematikunterricht, bei Mathematikhausübungen oder beim Lernen von Mathematik sagen: „Ich verstehe!". Den folgenden Zitaten liegt eine von mir am 22. Februar 2005 durchgeführte schriftliche Befragung von Schülerinnen und Schülern einer 4. Klasse und 7. Klasse (AHS) zugrunde. Dabei bekamen die Befragten je ein A4-Blatt mit folgendem Text: *Wenn ich im M-Unterricht, bei der M-Hausübung oder beim Lernen sage: Ah, ich habe verstanden! Ich verstehe …", dann meine ich …*

Die Ergebnisse dieser Befragung lassen sich in fünf Gruppen zusammenfassen.

(i) Verstehen als Fähigkeit Beispiele zu lösen:

„dass ich weiß, wie man zur Lösung eines Beispiels kommt, ich kann dann Beispiele richtig lösen."

„ich kann auch ähnliche Beispiele alleine lösen."

„das ich mich mit diesem Beispiel auskenne, aber nicht überall auskenne."

„ich habe verstanden, sage ich auch, wenn es sich nur um einen Angabetext handelt, das heißt aber noch lange nicht, dass ich das Beispiel richtig rechnen kann."

„dass ich Beispiele ohne Schulübungsvorlage lösen kann und meinen Mitschüler/innen das Stoffgebiet erklären kann, dann merke ich es mir auch länger als bis zur nächsten Schularbeit."

„verstanden hat man nicht, wenn man nur ein Beispiel ausrechnen kann und bei einem weiteren scheitert."

(ii) Verstehen als Fähigkeit Formeln selbstständig herzuleiten:

„zu verstehen, wie man eine Formel herleitet, auf welchen Wegen man etwas Bestimmtes ausrechnen kann."

„wenn ich Formeln nicht auswendig gelernt habe, sondern anhand einer Skizze jederzeit herleiten kann und ich verstehe, warum das so ist."

(iii) Verstehen als Auslöser positiver Emotionen:

„Verstehen gibt mir Selbstsicherheit und Selbstvertrauen."

„ich kann mit mir zufrieden sein, ich fühle mich bestätigt, dann habe ich Spaß an der Mathematik!

„es ist auch eine tolle emotionale Bindung, wenn das Verstehen von Dingen, die längere Zeit unklar bzw. unverständlich waren, plötzlich auftritt und den Horizont erweitert."

(iv) Verstehen im Hinblick auf Merken, Lernen und Üben:

„was ich verstehe, merke ich mir für immer."

„Verstandenes merke ich mir viel länger."

„Verstandenes merke ich mir nicht ewig."

„dass ich aufhören kann zu lernen."

„verstehen bedeutet, nicht so viel üben zu müssen."

(v) *Verstehen als Sinnstiftung, als Stiftung von Zusammenhängen und bedeutende Komponente des Unterrichts:*

„dass ich einen logischen Zusammenhang gebildet habe und den Hintergrund verstehe. Dieses Verstehen ist mir in Mathematik sehr wichtig."

„In Mathematik ist das Verstehen wichtiger als in jedem anderen Fach, weil es meist um Probleme geht. Es ist wie im Leben: nur wenn ich ein Problem verstehe, kann ich es auch lösen!"

„das es logisch und erklärbar für mich ist, wozu man was braucht und wieso und was ich da überhaupt rechne oder zeichne."

„Verstehen bedeutet für mich, den Sinn, die Bedeutung und die Lösung von mathematischen Problemen zu erkennen, ohne etwas auswendig zu lernen!"

Der Verstehensbegriff ist also, wie die obige Liste ausschnittweise zeigt, [auch!] für Schüler und Schülerinnen ein vielschichtiger und diversifizierter. Welche Definitionen von „Verstehen" die fachdidaktische Literatur für uns bereithält, wird im nächsten Abschnitt angeführt.

Im Folgenden werde ich einige bekanntere theoretische Ansätze darstellen und dann gewisse Grundsätze angeben, die meine Verwendung des Verstehensbegriffs leiten sollen. Dabei will ich auf eine vernünftigen Balance zwischen wissenschaftlicher Schärfe und Anbindung an den Gebrauch der Alltagssprache abzielen, wie dies auch Heymann in seinen Bemerkungen zum Verhältnis von Wissenschaft- und Alltagssprache [Hey, S. 33 ff.] für den Begriff Allgemeinbildung programmatisch sehr klar begründet und schön ausgeführt hat.

4.2 Ausgewählte Theorien und Zugänge zum Begriff des mathematischen Verstehens

4.2.1 Lerntheorien – Kognitionstheoretische Modelle

Eine erste Annäherung an den Verstehensbegriff kann beispielsweise über verschiedene Lerntheorien erfolgen, in der Hoffnung, dort auf Definitionen, Erläuterungen oder Modelle des Verstehens zu stoßen. Wir umreißen im Folgenden die Grundgedanken dreier Lerntheorien; eine davon wird sich als speziell geeignet erweisen zum Verständnis des Verstehensbegriffs beizutragen.

In den *behavioristischen Lerntheorien* und Traditionen wird Lernen als die Veränderung von Verhaltensweisen, als Reaktion auf einen Reiz verstanden. Dabei entspricht Lernen konditionierten Reflexen, die durch Adaption erworben werden [Bau, S. 101]. Das Gehirn wird als *black box* aufgefasst, die vom Lehrenden bzw. vom Lehrenden selbst in geeigneter Weise „zugerichtet“ werden muss. Die eigentlichen Veränderungsprozesse im lernenden Subjekt sind nicht Gegenstand dieser Lerntheorie, denn die Behavioristen gehen davon aus, dass diese Prozesse verborgen sind und sämtliche Aussagen darüber reine Spekulation wären.

Aus *kognitivistischer Perspektive* ist Lernen die Ausbildung von kognitiven Strukturen (Schemata oder mentale Modelle). Das menschliche Gehirn wird nicht als *black box*, sondern als informationsverarbeitendes System aufgefasst, das Informationen aus der Außenwelt aufnimmt, verarbeitet und kognitive Strukturen bildet oder bereits bestehende verändert. Die Kognitivisten/Kognitivistinnen sind insbesondere an den inneren Prozessen des menschlichen Gehirns interessiert. Dennoch ist es kaum möglich, den Informationsfluss im Hirn direkt zu beobachten, auch wäre den Neuronenaktivitäten für unser Forschungsfeld nicht viel Brauchbares zu entnehmen. Also müssen Kognitivisten/Kognitivistinnen ihre Schlüsse aus indirekten Evidenzen ziehen [Bau, S. 104]. Eine der wichtigsten Methoden dabei ist es, Algorithmen und adäquate Wissensrepräsentationen zu finden, anhand derer menschliche Denkprozesse beschrieben werden können. Ein geeignetes Medium für derartige Untersuchungen stellt der Computer dar. Peter Baumgartner weist beispielsweise daraufhin, dass trotz zahlreicher Hinweise auf die Adäquatheit computer-modellierter Wissensrepräsentationen im Endeffekt nur gewagte indirekte Schlüsse auf menschliche Denkprozesse möglich sind [Bau, S. 106].

Ferner vernachlässigen die kognitivistischen Lerntheorien, dass ohne soziale Kommunikation geistige Prozesse weder wahrnehmbar noch entwickelbar sind [Bau, S. 106].

Konstruktivistische Lerntheorien beruhen im Gegensatz zu den kognitivistischen auf der Annahme, dass das Individuum streng genommen keine Informationen von der Außenwelt aufnimmt. Der menschliche Organismus wird als informationell geschlossenes System verstanden, das keinen informationellen Input und Output hat [Bau, S. 107 f.]. Es gibt jedoch eine energetische Austauschbeziehung mit der Umwelt. Bei der Informationsverarbeitung handelt es sich demnach um einen Prozess der Realitätskonstruktion. Kognitive Strukturen stellen demgemäß nicht eine Widerspiegelung der Außenwelt, sondern die subjektive Realität des Individuums dar. Lernen wird als aktiver Prozess gesehen, bei dem das Individuum sein Wissen in Beziehung zur früheren Erfahrungen konstruiert. Lernen heißt also, dass der Mensch seine Konstruktionen modifiziert, daraus kann jedoch nicht geschlossen werden, dass die neuen Konstruktionen zu einer besseren Repräsentation der Außenwelt werden, möglicherweise werden sie nur in eine praktikablere Form übergeführt oder sogar revidiert. Auf einen vor allem für die Mathematik und Informatik wichtigen Aspekt, nämlich die Notwendigkeit der symbolischen Repräsentationen im konstruktivistischen Lernparadigma, weist Karl Josef Fuchs hin [Fu3, S. 62 ff.]. Dass in der „*modernen Lerngesellschaft mit Neuen Medien*“ [Fu3, S. 62] bei der Analyse, Konzeption und Bewertung von Software zur Unterstützung individueller (konstruktivistischer) Lernprozesse vorwiegend Handlungsorientierung und graphische Repräsentation im Mittelpunkt didaktischer, methodischer, pädagogischer und psychologischer Betrachtungen stehen, birgt nach Fuchs [Fu3, S. 62] die Gefahr in sich, wichtige Ziele mathematischer und informatischer Bildung, „*nämlich der Abstraktion von der Art des Vollzugs hin zu einer Verinnerlichung der Handlung*“ [Fu3, S. 62] aus dem Auge zu verlieren. In diesem Prozess der Abstraktion spielen Symbole eine große Rolle und ich kann K. J. Fuchs nur zustimmen, wenn er meint: „*Mathematisch-naturwissenschaftliche Lernsysteme, die die Ebene der Abstraktion und symbolischen Repräsentation ausblenden, können einem Bild einer ganzheitlichen Begriffsbildung nur bedingt genügen.*“ [Fu3, S. 65].

Dieser kurze Abriss dreier Lerntheorien lässt bereits erkennen, dass Modelle des Verstehens wohl eher in kognitivistischen als in behavioristischen oder konstruktivistischen Lerntheorien ausfindig zu machen sind, da nur in der ersten das Verhältnis zwischen Subjekt und Objekt (genauer: Innerem des Subjekts und äußerem Objekt) des Verstehens überhaupt thematisiert wird. Wir gehen daher im Folgenden auf einige kognitionstheoretische Modelle ein.

Der Begriff „*Kognition*“ wird abgeleitet von lat. c*ognoscere* bzw. griech. *gignoskein* (erkennen, wahrnehmen, wissen) und taucht erstmals in der Psychologie des 19. Jahrhunderts auf [Stru, S. 303 ff.]. In der kognitiven Psychologie werden unter dem Begriff Kognition diejenigen Funktionen zusammengefasst, die das Wahrnehmen und Erkennen, das Enkodieren, Speichern, Erinnern sowie das Denken und Problemlösen, die motorische Steuerung und schließlich den Gebrauch der Sprache umfassen [Stru, S. 303 ff.]. Wesentlich für die Kognition sind Prozesse, die auf mentalen Repräsentationen beruhen und für die deshalb ein Gedächtnis, also die Fähigkeit zur Akkumulation und Speicherung von Wissen, angenommen wird.

4.2.1.1 Gedächtnismodelle

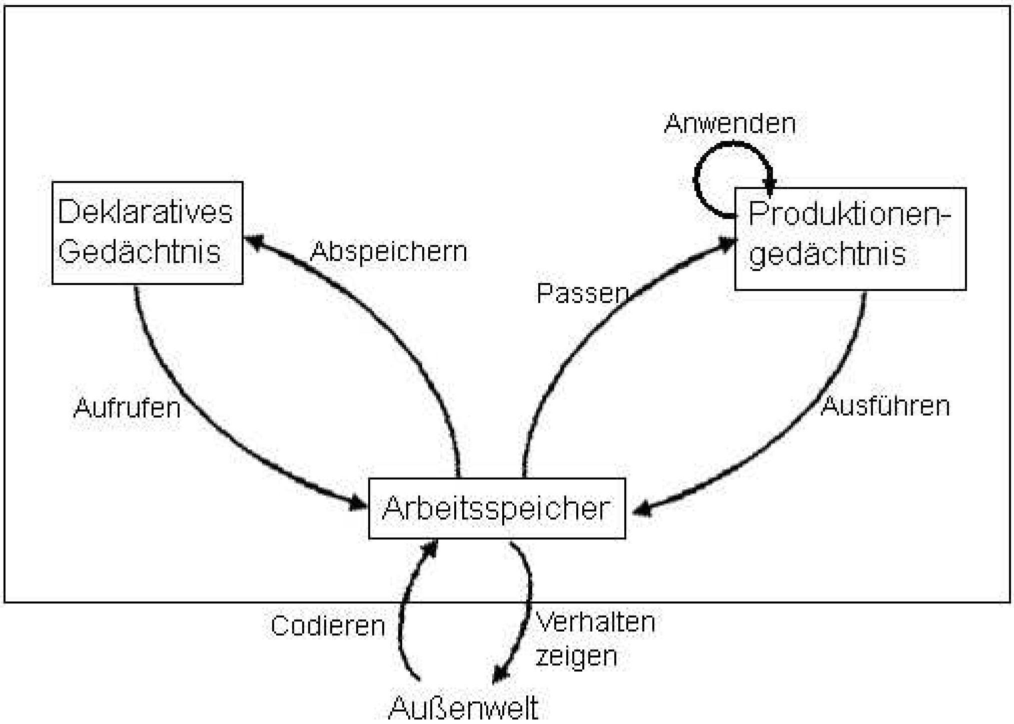
Eines der ältesten, aber kaum mehr gebräuchlichen Gedächtnismodelle wurde von Anderson und Bower 1973 entwickelt und unter dem Namen HAM (Human Associate Memory) veröffentlicht [Has, S. 100]. Dieses Gedächtnismodell enthält zwar eine Theorie des deklarativen (erklärenden) Wissens, es fehlt jedoch eine des prozeduralen (verfahrensmäßigen) Wissens.

John Robert Anderson, der 2004 den „David E. Rumelhart Prize for Contributions to the Formal Analysis of Human Cognition” erhielt, entwickelte 1976 ein neues Modell namens ACT (Adaptive Control of Thought), mit dem er eine Synthese seines Gedächtnismodells mit so genannten Produktionssystemen anstrebte. Unter Produktionssystemen versteht man Mengen von Wenn-Dann-Aussagen, die die Simulation einer kognitiven Leistung ermöglichen sollen [Has, S. 101f.]. Die Verarbeitung des Wissens geschieht folgendermaßen:

- Der Wenn-Teil einer Produktion vergleicht die gegebene Information mit den bestehenden Begriffsstrukturen;
- ist die Bedingung erfüllt, so erfolgt die im Dann-Teil formulierte Aktion.

Das ACT Modell wurde von Anderson kontinuierlich weiterentwickelt, mittlerweile gibt es die Modelle ACT*, ACT-R bis ACT-R6[3]. All diesen Modellen liegt das 1983 vorgestellte ACT* zugrunde, das auf der Darstellung des deklarativen Wissens in Netzwerken und des prozeduralen Wissens in Produktionssystemen beruht.

Ein kognitives System wird mit dem ACT* so modelliert, wie es die folgende Abbildung darstellt [Has, S. 103]:



Dabei entspricht dem menschlichen Kurzzeitgedächtnis der „Arbeitsspeicher“, in dem deklaratives und prozedurales Wissen für den aktuellen Gebrauch gespeichert wird; dem „deklarativen Gedächtnis“, das als semantisches Netzwerk konzipiert ist, entspricht jener Teil des menschlichen Langzeitgedächtnisses, in dem Fakten, Beziehungen und Bedeutungen gespeichert sind. Und dem „Produktionengedächtnis“ entspricht jener Teil des Langzeitgedächtnisses, in dem heuristische Strategien bzw. alle Produktionen des kognitiven Systems gespeichert sind.

Anderson selbst hat die Wirkweise seines Modells sehr ausführlich am Beispiel der schriftlichen Addition beschrieben. Nach Hasemann [Has, S. 104] lässt sich mit einer Variante dieses Modells, bei der falsche Strategien als „alternative Produktionen“ be-

[3] Siehe auch: http://act-r.psy.cmu.edu/ gültig am: 05.01.2006

trachtet werden, nahezu jedes individuelle Verhalten von Schülern und Schülerinnen bei schriftlichen Subtraktionen zeigen.

4.2.1.2 Netzwerke, Schemata und Frames

Semantische Netzwerke oder Netze im Allgemeinen werden häufig zur Beschreibung der menschlichen Wissensstruktur verwendet, eine kurze Begriffsdefinition erscheint daher notwendig. Netzwerke im kognitivistischen Sinn sind gerichtete Graphen. Der Knoten eines Netzes steht meist für einen Begriff, für eine Handlung oder auch für ein spezifisches Objekt. Die Maschen bzw. Verbindungen zwischen den Knoten entsprechen semantischen Relationen. Die Knoten der Netze stehen aber auch für bestimmte Bedeutungseinheiten und die Verbindungslinien zwischen ihnen stellen die Assoziationen dar [Has, S. 104f.].

Eine Weiterentwicklung der Netzwerkmodelle sieht Hasemann in der Schema-Theorie sowie in den Begriffen „*Frames*" und „*Scripts*" [Has, S. 105]. Da der Terminus „*Script*" jedoch vorwiegend bei Forschungen zum Textverständnis verwendet wurde, wird hier nicht näher auf ihn eingegangen. Alle anderen Begriffe bzw. Bezeichnungen oder Namen finden sich stets bei der Modellierung mathematischer Denkprozesse wieder und sind daher kurz zu explizieren.

Ein „Schema" besteht einerseits aus Informationen über die wichtigsten Merkmale der dadurch dargestellten Wissenseinheit und enthält andererseits aber auch Informationen über die Funktion dieses Wissens und Regeln für dessen Anwendung [Has, S. 105 ff.].

Der Terminus „Frame" wurde unter anderem durch Arbeiten zur Künstlichen Intelligenz geprägt und ist als Datenstruktur zur Darstellung stereotyper Situationen aufzufassen. Ein Frame umfasst aber auch Informationen zur Handhabung derselbigen, Informationen über das, was als nächstes passieren wird und Informationen darüber, was zu tun ist, wenn diese Erwartungen nicht erfüllt werden.

Frames beschreiben weiters prototypische Objekte oder Situationen und haben die Eigenschaft, dass sie Leerstellen („slots") besitzen [Has, S. 121]. Jeder Mensch kann diese Leerstellen mit verschiedenen Aspekten oder Eigenschaften füllen.

Es stellt sich nun die Frage, ob mathematische Begriffe im Gedächtnis der Schüler und Schülerinnen prototypisch repräsentiert werden oder ob eine Repräsentation mithilfe von Eigenschaften und Relationen möglich ist. Hasemann meint, dies könnte untersucht werden, wenn die Begriffsvorstellungen der Schüler und Schülerinnen betrachtet werden, die nach einem längeren Zeitraum tatsächlich noch vorhanden sind [Has, S. 123]. Hasemann meint auch, dass vieles – beispielsweise die Kontextabhängigkeit – gegen die Repräsentation von mathematischem Wissen mithilfe von Eigenschaften und Relationen spricht. Ferner stellt er fest, dass Lernende oft ganzheitliche Bilder von Prototypen, aber auch Konstruktionsvorschriften oder Ketten von Prozeduren speichern.

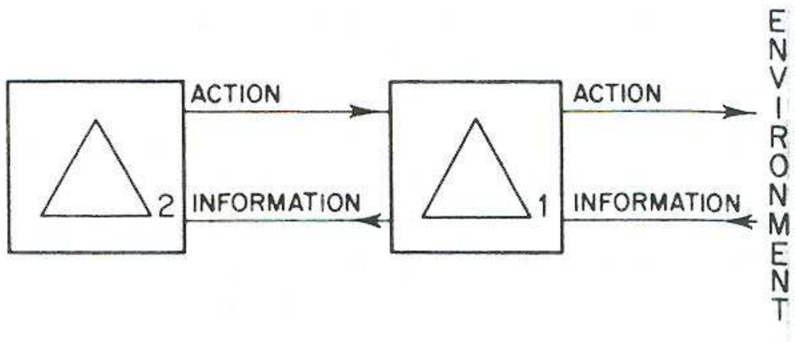
Für mich stellt sich aber die Frage, ob es überhaupt wünschenswert ist, dass Schüler und Schülerinnen ihr mathematisches Wissen großteils in Form von Prototypen, ihre mathematischen Fertigkeiten in Form von Konstruktionsvorschriften und Ketten von Prozeduren abspeichern. Kämen nicht vor allem die Konstruktionsvorschriften dem verpönten Lernen nach „Rezepten“, das ohne Verständnis auskommt, gleich?

Die soeben ausgeführten kognitionstheoretischen Gedächtnismodelle geben noch keine detaillierte Auskunft darüber, wie das Verstehen von Mathematik stattfindet. Die nun folgende Vorstellung zweier ausgewählter Verstehensmodelle vermag möglicherweise dies zu leisten.

4.2.1.3 Verstehensmodelle

Der Versuch einer Klärung des Verstehensbegriffs wurde aus verschiedensten Sichtweisen unternommen. Aus kognitionstheoretischer Perspektive sind vor allem die mathematikdidaktischen Verstehensmodelle von Skemp und Herscovics & Bergeron zu nennen. Charakteristisch für sie ist, dass sie verschiedene Formen und Stufen des Verstehens unterscheiden.

Richard R. Skemps Verstehensmodell stützt sich auf ein zweistufiges „model of intelligence“ [Ske, S. 44] und die Annahme, dass menschliches Verhalten meist zielgerichtet ist. Zur Beschreibung der zielgerichteten Aktivitäten verwendete Skemp das folgende Modell:



In Delta 1(Δ_1) existiert ein „director system“, das Informationen über den aktuellen, gegenwärtigen Stand des (der Außenwelt zugehörigen) Operanden, auf den eingewirkt wird, mit dem Zielzustand vergleicht. Mithilfe eines Plans, welcher aufgrund eines Schemas erstellt wird, soll der Operand in den Zielzustand gebracht und dann dort behalten werden [Ske, S. 44]. Δ_1 hat die Aufgabe, physikalische Aktionen verschiedenster Art zu diesem Zweck zu regeln. Δ_2 stellt ein zweites „director system“ dar, dessen Operanden nicht der „Außenwelt“ angehören, sondern mentale Objekte in Δ_1 sind. Die Aufgabe von Δ_2 besteht in der Optimierung von Δ_1 und in der Regelung der zielgerichteten mentalen Aktivitäten.

Etwas verstehen bedeutet für Skemp, es zu assimilieren und es in ein entsprechendes Schema aufzunehmen [Ske, S. 45]. Um einen mathematischen Begriff zu verstehen, muss er mit einem bestehenden Schema verknüpft werden oder dieses verbessert bzw. neu organisiert werden. Für Skemp ist ein Schema mit einer Landkarte vergleichbar. Die Punkte repräsentieren Begriffe und die Linien die Beziehungen zwischen ihnen [Has, S. 118]. Nun sind nach Skemp prinzipiell so viele Typen des Verstehens zu unterscheiden, wie es Typen von Schemata gibt. Praktisch gibt es für ihn jedoch drei „*kinds of understanding*“, die besonders hervorzuheben sind [Ske, S. 46 ff.]:

- *„instrumental understanding“*

  Ziel dieser Art des Verstehens ist es, auf alle erdenklichen Fragen der Lehrer und Lehrerinnen richtige Antworten zu geben. Die dabei auftretenden Operanden sind mathematische oder verbale Symbole. Das unmittelbare Ziel der Schüler und Schülerinnen hierbei liegt in der Erlangung der Zustimmung durch die Lehrenden und die Vermeidung von Missbilligung. Für das „instrumental understanding“ erlernen Schüler und Schülerinnen Regeln zur Handhabung und Verbindung der Symbole. Sie erlernen aber nicht die damit verbundenen Konzepte, die sie für weitere und neue Situationen bräuchten.

- *„relational understanding“*

„relational understanding“ meint beziehungsreiches Lernen und Verstehen sowie das Erstellen von relationalen Schemata. Die Operanden hierbei sind neu entstandene Konzepte und das Ziel liegt in der Verbindung der passenden Schemata. Ebenso werden bereits angelegte Schemata reflektiert, um sie zu verbessern und um sie besser zu organisieren. Skemp weist dezidiert daraufhin, dass es in solchen Phasen Ruhe zur Reflexion geben muss. Die Symbole leisten bei diesen Aktivitäten einen wesentlichen Beitrag, ohne sie wäre eine Diskussion der (mathematischen) Konzepte nicht möglich. „Relational Understanding“ unterscheidet sich vom „instrumental understanding“ vor allem dadurch, dass die Schüler und Schülerinnen eine sehr persönliche Freude, ein sehr persönliches Vergnügen („very personal pleasure“) empfinden können.

Als langfristige Ziele des „relational understanding“ nennt Skemp die Ausbildung mathematischer Konzepte, für die im Gegensatz zum Erlernen von Regeln ein wesentlich höherer Zeitaufwand nötig ist. Außerdem sei dies – so Skemp – langfristig der bessere Weg, Prüfungen zu bestehen, zukünftige Arbeitgeber und Arbeitgeberinnen zu befriedigen und Situationen, die mathematischer Methoden bedürfen, zu bewältigen.

- *„logical understanding“*

Hierfür müssen als Operanden mathematische Ideen, Konzepte, Schemata und Problemlösungsmethoden bereits entwickelt und verstanden sein, denn das Ziel ist es, sich ihrer Korrektheit, präzisen Ausformulierung und Fehlerfreiheit zu vergewissern.

Überdies unterscheidet Skemp den intuitiven Modus und den reflektierenden Modus mentaler Aktivitäten, welche in Kombination mit allen drei Arten des Verstehens auftreten können. Für mentale Aktivitäten des intuitiven Modus ist das Bewusstsein in Δ_1, für mentale Aktivitäten des reflektierenden Modus ist das Bewusstsein in Δ_2 zentriert.

Herscovics und Bergeron [Her, S. 75 ff.] betrachten das Verstehen oder den Konstruktionsprozess eines mathematischen Begriffs durch ein Individuum als einen Verlauf, den sie mit einem „konstruktivistischen“ Modell beschreiben [Her, S. 77 ff.]. Dabei unterscheiden sie vier Stufen des Verstehens.

- *„intuitive understanding“*
  Diese Stufe des Verstehens ist von informellem Wissen und visueller Wahrnehmung geprägt. Sie bietet sich als Ausgangspunkt für die Aneignung von Wissen an und kann möglicherweise eine Steigerung der Motivation bewirken [Her, S. 78].

- *„procedural understanding“*
  Auf der zweiten Stufe des Verstehens werden Initialprozeduren („initial procedures“) durch die Koordination von intuitivem Wissen und einigen Vorerfahrungen ausgebildet. Dabei können Mittel und Wege für eine Systematisierung, die von visuellen Vorstellungen losgelöst ist, bereitgestellt werden [Her, S. 78].

- *„abstraction“*
  Dieser kognitive Level besteht aus zwei aufeinander folgenden Phasen. Die erste zeichnet sich durch eine Abgrenzung bzw. Trennung der Begriffe und Konzepte von den Verfahren und Prozeduren aus. In der zweiten Phase, die vor allem auch von Verallgemeinerung geprägt ist, kommt es zum Aufbau bzw. zur Ausbildung von „invariants“, also dem gemeinsamen Kern [Her, S. 78].

- *„formalization“*
  Auf der vierten Stufe des Verstehens rückt die „particularly symbolic nature of mathematics“ in den Vordergrund. Dabei sind nicht nur formale Beweise, sondern auch mathematische Auffassungen und deren Repräsentationen bedeutend [Her, S. 78].

Die hier skizzierten Unterscheidungsformen des Verstehens sind für die praktische Unterrichtsarbeit sicherlich hilfreich, denn sie sensibilisieren dafür, dass das Verstehen mathematischer Begriffe und Regeln kein einmaliger Akt, sondern ein langwieriger Prozess ist [Has, S. 116]. Für Lehrende und deren Unterrichtsplanung kann es durchaus auch hilfreich sein, Überlegungen anzustellen, welche Verstehensform angestrebt wird. Dass diese Modelle jedoch stark auf die seitens der Schüler und Schülerinnen beliebten und bevorzugt „mechanisch gelernten“ Begriffe, Regeln und Verfahren ausgerichtet sind, ist evident, entspricht aber eben genau der kognitivistischen Tradition.

Weitere interessante Ansätze sind vor allem auch bei sozial-konstruktivistischen Lerntheorien, insbesondere dort, wo Sprache und Zeichensysteme im Vordergrund stehen, zu finden. Sozial-konstruktivistische Lerntheorien betrachten die Interaktion des Subjekts mit seiner sozialen Umwelt. Sie sind aber auch eng an die Kapazität der Symbolisierung gebunden und meinen, dass Symbole keine inhärente Bedeutung haben, sondern deren Bedeutung erst in sozialer Interaktion entstehe. Lernen sei demnach die Generierung der Bedeutung von Symbolen im sozialen Kontext. Es ist unbestritten, dass Symbole und Zeichen für die Mathematik sowie deren Repräsentation bedeutend und wichtig sind. Welche diesbezüglichen Aspekte zu beachten sind, soll im folgenden Abschnitt in groben Zügen umrissen werden.

4.2.2 Semiotische Perspektiven

Michael H.G. Hoffmann und die Arbeitsgruppe *Erkenntnistheoretische und Semiotische Grundlagen des Mathematiklernens* (Universität Bielefeld) gehen der Frage nach, welche Rolle Darstellungen und Zeichen in der Mathematik spielen und inwiefern das Verstehen von Mathematik von den Möglichkeiten der Darstellung des mathematischen Wissens abhängt [Hof1, S. 2]. Zweifellos ist jede Kommunikation mathematischer Inhalte auf Darstellungen und Zeichen angewiesen, fraglich ist jedoch, ob und wie diese Darstellungen und Zeichen mathematische Tätigkeiten und die Möglichkeiten des Wissenserwerbs bestimmen.

4.2.2.1 Die semiotische und amodale Mathematikauffassung

In seinen Überlegungen unterscheidet Hoffmann die „semiotische“ und „amodale“ Mathematikauffassung [Hof1, S. 3]. Die amodale Mathematikauffassung reicht zurück auf die Tradition platonischer und intuitionistischer Ansätze, die die Unabhängigkeit des mathematischen Denkens von der jeweils gewählten Darstellungsform betont und davon ausgeht, dass die zu entdeckenden mathematischen Wahrheiten unabhängig von menschlichen Erkenntnismöglichkeiten und ebenso unabhängig von den verfügbaren

Darstellungsmitteln existieren. Für das Verstehen von Mathematik bedeutet dies, dass es nur eine Wahrheit gibt und diese von den Lernenden entweder gesehen oder eben nicht gesehen wird [Hof1, S. 2].

Aus semiotischer Sicht ist jede Erkenntnis relativ zu einer Perspektive, und der Darstellung, über die sie vermittelt wird, wird große Relevanz beigemessen. Hoffmann zitiert Charles Sanders Peirce, der meinte: „*Etwas* ***verstehen*** *bedeutet, es repräsentieren zu können, und wenn dieses* ***Etwas*** *selbst nur in Repräsentationen fassbar wird, dann bedeutet* ***Verstehen*** *in erster Linie, Zeichen in andere Zeichensysteme* ***übersetzen*** *zu können.*“ [Hof1, S. 3].

Die semiotische Mathematikauffassung berücksichtigt die Vielfalt möglicher Darstellungsformen und hebt sie sogar als Wesensmerkmal der Mathematik hervor. Das Verhältnis zwischen der gewählten Darstellungsform und dem dargestellten Sachverhalt wird vorerst einmal als „Problem“ betrachtet [Hof1, S. 3].

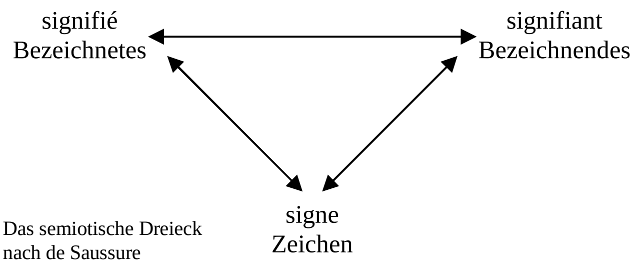
Die Semiotik als Wissenschaft von den Zeichen hat drei bedeutende Vertreter aufzuweisen. Diese sind der französische Linguist *Ferdinand de Saussure* (1857–1913), der amerikanische Philosoph *Charles S. Peirce* (1839–1913) und der russische Psychologe *Lev S. Vygotskij* (1896–1934). Zunächst springt ins Auge, dass in der Semiotik sehr oft Dreiecke bzw. dreieckige Diagramme zur Veranschaulichung der jeweils grundlegenden Begriffe verwendet werden, die einander aber oft nur teilweise entsprechen. Überhaupt ist Vorsicht geboten, wenn die verschiedenen semiotischen Theorien miteinander verglichen werden, da den „Zeichen“ der verschiedenen Theorien oft inkommensurable Bedeutungen zugrunde liegen.

4.2.2.2 Zeichenrelationen

Seit de Saussure ist die Zeichenhaftigkeit von Sprache zu einer zentralen Frage der Sprachwissenschaft geworden. Er war auch einer der ersten, der die Opposition erkannte, „die mit der Doppelnatur des Wortes an einem Lautkörper und einem ihm fest zugeordneten geistigen Begriff gegeben ist“ [Ade, S. 313]. Nach de Saussure haben Wörter, wie eine Münze, unablösbar eine Vorder- und eine Rückseite, eine Klang- und eine Vorstellungsseite [Ade, S. 314]. Das Bezeichnende (*signifiant*) der Lautfolge hat eigentlich nichts mit dem Bezeichneten (*signifié*) als der Vorstellung von dem bezeichneten Objekt zu tun.

In der Mathematik sind aber die Gegenstände der Betrachtung meist nur durch Zeichen gegeben. Schülerinnen und Schüler haben nach Hoffmann oftmals das Gefühl, nur mit Zeichen oder Darstellungen zu hantieren [Hof2, S. 37]. Dies und die oftmalige, aber nicht begrüßenswerte Erfahrung der Ununterscheidbarkeit des mathematischen Gegenstandes oder Gedankens von seiner jeweiligen Darstellungsform führt dazu, dass der für die mathematische Kreativität so wichtige Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungsformen entfällt und der Mathematikunterricht häufig auf Berechnungsprozeduren reduziert wird.[4] Diese Reduzierung hat jedoch zur Folge, dass es zu einer Identifizierung von Zeichen und Gegenstand kommt, gleichzeitig aber leider auch zu einer Vernachlässigung der davon unabhängigen Begriffe bzw. Bedeutungen. Wenn aber Verstehen heißt, Begriffe zu bilden, wie schon Keitel, Otte und Seeger 1980 feststellten, und in der Mathematik die Begriffsbildung aber nur über Zeichen möglich ist, dann ist nach Hoffmann „*die Irreduzibilität von Begriff, Zeichen und Gegenstand für ein Verständnis des Mathematiklernens wesentlich*." [Hof2, S. 38].

Nach Steinbring gründet die Unterscheidung von Mitteilung, Information und Verstehen auf de Saussures Unterscheidung zwischen Bezeichnendes (signifiant), Bezeichnetes (signifié) und Zeichen (signe) [Ste, S. 28 ff.].



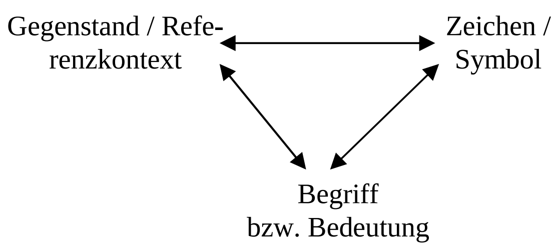
Das semiotische Dreieck
nach de Saussure

Im Unterricht, bei Kommunikation oder Interaktion werden stets Mitteilungen in Form von „Bezeichnenden" gegeben, die von den intendierten Informationen – den „Bezeichneten" – unterschieden werden müssen. Nach Steinbring kann erst durch diese Unterscheidung Verstehen in Form der Herstellung eines „Zeichens" entstehen [Ste, S. 28 ff.].

[4] Vielleicht kann aber gerade der Computer hier besondere Dienste leisten. Denn gerade beim Arbeiten mit dem Computer ist es ja typisch, dass man Zeichen eingibt und sich dann erst bewusst für eine Darstellungsform entscheiden muss. Und gerade der Computer erlaubt und ermöglicht aber auch den raschen Wechsel der Darstellungsformen. Weiters macht sich jeder falsche Gedanke sofort in seiner Darstellungsform sichtbar, wenn die Schüler/innen etwas sehen, was sie nicht oder anders erwartet haben, sofern sie überhaupt etwas erwartet haben.

Steinbring modifiziert dieses Dreieck, wobei er folgende Überlegungen zugrunde legt. Er ist überzeugt, dass die mathematische Unterrichtskommunikation als spezifische soziale Interaktion aufzufassen ist, für deren Beschreibung und Analyse die besondere Wechselbeziehung zwischen „*Zeichen / Symbolen*“ und „*Objekten / Referenzkontexten*“ [Ste, S. 28 ff.] von zentraler Bedeutung ist.

Zur Erfassung und Konstruktion des mathematischen Wissens bedarf es „*bestimmter Zeichen- bzw. Symbolsysteme*“ [Ste, S. 28 ff.]. Hierbei haben diese Zeichen zunächst für sich alleine keine Bedeutung, diese muss erst von den lernenden Schülerinnen und Schülern hergestellt werden.



Das epistemologische Dreieck

Um aber diese mathematischen Zeichen mit Bedeutung anzureichern, ist ein angemessener „*Referenzkontext*“ [Ste, S. 28 ff.] notwendig. Die Bedeutung mathematischer „*Begriffe*“ wird vom Erkenntnissubjekt als Wechselbeziehung zwischen „*Zeichen-/ Symbolsystemen*“ und „*Referenzkontexten / Gegenstandsbereichen*“ aktiv konstruiert. Steinbring möchte mit dem epistemologischen Dreieck den Zusammenhang zwischen den Zeichen zur Kodierung des Wissens und den Referenzkontexten zur Etablierung der Bedeutung des Wissens darstellen [Ste, S. 28 ff.]. Überdies sind die Beziehungen zwischen den Eckpunkten nicht explizit definiert, sondern bilden ein sich „*wechselweise stützendes und ausbalanciertes System*“ [Ste, S. 28 ff.].

Steinbring modifiziert also de Saussures Dreieck, um besser verdeutlichen zu können, dass mathematische Bezeichnende immer schon selbst Zeichen sind, der mathematische Begriff von zentraler epistemologischer Bedeutung ist und somit an die Stelle des „Zeichens“ (signe) tritt. Mathematische Begriffe lassen sich somit nach Steinbring als „symbolisierte, operative Beziehungen“ zwischen ihren abstrakten Kodierungen und den „sozial intendierten Deutungen“ auffassen [Ste, S. 28 ff.].

Für Hoffmann stellt das epistemologische Dreieck ein sinnvolles theoretisches Instrument dar, wenn es darum geht, Lernen als die Entwicklung von Begriffen auf Seiten der

Lernenden zu verstehen [Hof2, S. 37]. Denn die Gegenstände der Mathematik sind jedenfalls gedanklicher Natur, Relationen, Gesetzmäßigkeiten oder selbst Zeichen. Allerdings weist er daraufhin, dass Steinbring, wenn er sich auf das semiotische Dreieck von de Saussure bezieht, einen Fehler begeht, da Saussures Zeichenbegriff dyadisch und nicht triadisch gedacht war, wobei er (Hoffmann) wiederum vernachlässigt, dass hinter de Saussures Zeichenbegriff mehr als eine dyadische Auffassung steckt, worauf wir an dieser Stelle nicht weiter eingehen wollen.

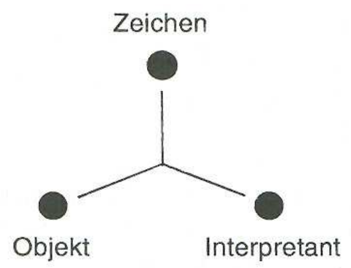
Wichtig für Lehrende erscheint mir die Ausbildung eines Bewusstseins hinsichtlich der Schwierigkeiten, die Schüler und Schülerinnen mit mathematischen Begriffen, ihren abstrakten Kodierungen und intendierten Deutungen gelegentlich haben. Denn erst dieses macht deutlich, dass beispielsweise die Schreibweise $f\colon x \to x^2$ von Lernenden möglicherweise falsch verstanden werden kann, dass also z. B. der Doppelpunkt nicht als solcher, sondern als Divisionszeichen gedeutet und verstanden wird.

Hoffmann wendet sich nun der Peirceschen Semiotik zu, die für ihn eine bzw. die zentrale Rolle spielt. Er meint zu erkennen, dass nur mit ihr alle denkbaren kognitiven Prozesse beschrieben werden sollen. Peirces differenzierte Klassifikationen verschiedener Zeichenarten ermöglicht es – so Hoffmann – alle Elemente, die bei Prozessen des Denkens, Schließens, Darstellens, Vorstellens und Erkennens eine Rolle spielen, zu beschreiben [Hof2, S. 48].

Mit den Details dieses aufwendigen theoretischen Gebäudes brauchen wir uns hier nicht zu befassen; es genügt, die wesentlichen Grundzüge im Hinblick auf die bereits oben erwähnten „Dreiecke“ zu skizzieren.

Peirce unterscheidet die Repräsentations- und Erkenntnisfunktion eines Zeichens. Das „Zeichen“ vermittelt in seiner triadischen Struktur zwischen dem, was er als „Objekt“ und dem was er als „Interpretant“ bezeichnet [Hof2, S. 48]. Ein „Zeichen“ ist nach Peirce zum einen etwas, das ein Objekt repräsentiert, zum anderen sind „Zeichen“ aber auch Mittel der Erkenntnis [Hof2, S. 49]. Diese Erkenntnisdimension des Zeichens ist einerseits im Sinne der Erkenntnistheorie nach Kant zu sehen, andererseits attestiert Hoffmann auch Unterschiede und Weiterentwicklungen in der von Peirce vermittelten Erkenntnisdimension. Nach Kant ist „die Möglichkeit von Erkenntnis immer vermittelt durch allgemeine Erfahrungsbedingungen“ [Hof2, S. 49] und wir haben „nie einen unmittelbaren Zugang zu *den Dingen an sich*“ [Hof2, S. 49]. Peirce verallgemeinert diesen Gedanken und meint, dass alle Erkenntnis durch Zeichen vermittelt ist [Hof2, S. 49]. Der Grundgedanke der semiotischen Erkenntnistheorie besteht darin, dass „Zeichen“ als die Bedingung der Möglichkeit von Erkenntnis verstanden werden, also zwischen Erkenntnisgegenstand und zu Erkennendem vermitteln, „Zeichen“ können aber gleichzeitig auch selbst Gegenstand der reflektierenden Beobachtung sein [Hof2, S. 50].

Zeichen sind bei Peirce in die nebenstehend abgebildet triadische Relation eingebunden. Ein Zeichen ist etwas, das für etwas steht, für sein Objekt und sich an jemanden richtet. Es erzeugt also im Bewusstsein jener Person ein äquivalentes oder weiter entwickeltes Zeichen. Das Zeichen, welches es erzeugt, nennt Peirce den „Interpretanten“ des ersten Zeichens [Hof2, S. 50].



Peirces triadische Zeichenrelation

Auf die Wiedergabe der detaillierten Hoffmanschen Ausführungen zu den Begriffen Interpretant, Objekt und Zeichen möchte ich hier aus zweierlei Gründen verzichten:

Erstens würde eine genaue Darlegung dieser Theorie den hier zur Verfügung stehenden Rahmen definitiv sprengen, denn es gälte nicht nur die Begriffe „unmittelbarer“, „dynamischer“, „finaler“, „emotionaler“, „energetischer“ und „logischer Interpretant“ zu erläutern und einander gegenüberzustellen, sondern auch auszuführen, worin sich ein „unmittelbares“ und „dynamisches Objekt“ unterscheiden und ferner müssten noch die Begriffe „Erstheit“, „Zweitheit“, „Drittheit“ im Zusammenhang mit der triadischen Relation behandelt werden.

Und zweitens wird im Verlauf der vorliegenden Arbeit kein Bezug mehr darauf genommen. Daher möchte ich meine Ausführungen zu den semiotischen Perspektiven des Verstehens von Mathematik mit einem Zitat, das mir für Unterricht und Kommunikation bedeutend erscheint, beenden.

> „Niemand kann direkt sehen, was und wie Menschen denken, und alles, was wir als Beobachter dazu formulieren, ist und bleibt Vermutung. Nur aus dem,

was jemand in Zeichen äußert oder wie sie oder er bestimmte Zeichen gebraucht können wir schließen, was und wie sie denkt." [Hof2, S. 50]

4.2.3 Fazit

Aus den vorhergehenden Ausführungen lassen sich nun einige wesentliche Aspekte von Verstehen herausdestillieren. Wir wollen die folgenden beiden als besonders wichtig hervorheben:

1. Etwas verstehen bedeutet, es zu assimilieren und es in ein entsprechendes Schema aufzunehmen.
2. Etwas verstehen bedeutet, es repräsentieren zu können, […], dann bedeutet Verstehen in erster Linie, Zeichen in andere Zeichensysteme übersetzen zu können.

Was aber könnte es nun bedeuten und was erwarten wir Lehrerinnen und Lehrer von Schülerinnen und Schülern, wenn wir beispielsweise davon sprechen, den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung zu verstehen?

Nach Abschnitt 4.2.1 liegt es wohl mehr oder weniger auf der Hand, was mit 1. für den Hauptsatz gemeint ist.

2. wirft jedoch noch einige Fragen auf:
Repräsentieren – entlehnt aus dem Französischen (*représenter*), zurückreichend auf das Lateinische *representare*, meint, sich etwas vergegenwärtigen [Klu, S. 759]. Aber bedarf es zum Vergegenwärtigen dieses Satzes mehr als eines Auswendiglernens der stellvertretenden Zeichen? Würde die Übersetzung in anderes Zeichensystem – vielleicht von der mathematisch kompakten Schreibweise in eine eher sprachliche beschreibende Form und umgekehrt oder eine illustrierende Skizze – die Lehrenden erahnen lassen oder daraufhin deuten, dass diesem ein Verstehen des Satzes und nicht nur ein Verstehen der gewählten Zeichensprache zugrunde liegt?

Gemäß diesen Darstellungen könnte man meinen, das Verstehen eines Satzes bestünde also darin, ihn in mathematischer Hinsicht „korrekt" handzuhaben (ihn zu artikulieren, ihn anzuwenden, ihn aufzuschreiben, also ihn bzw. seine Aussage in irgendeiner Weise darzustellen) und ihn in bestehendes Wissen entsprechend einzuweben.

Zum Abschluss dieses Kapitels möchte ich versuchen, das Verstehen unter einem weiteren – nämlich dem philosophischen – Aspekt zu beleuchten und wende mich dazu Wittgensteins diesbezüglichen Ausführungen zu. Die Leserin und der Leser werden sofort erkennen, dass des späten Wittgensteins Annäherung an den Verstehensbegriff eine behutsame ist und ich ihn hier quasi als prominenten Zeugen für meine schon eingangs erwähnte Vorsicht hinsichtlich des Verstehensbegriff anführe.

4.3 Exkurs – Wittgenstein

Ludwig Wittgenstein widmet sich in den „Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik“ unter anderem dem Verstehen, insbesondere dem Verstehen eines Satzes und Beweises. Die nun folgenden Zitate finden sich alle im zuvor genannten Werk [Wittg, S. 282 ff.].

> „Alles was ich sage, kommt eigentlich darauf hinaus, daß man einen Beweis genau kennen und ihm Schritt für Schritt folgen kann, und dabei doch, was bewiesen wurde, nicht *versteht*.“

Nach Wittgenstein ist es also möglich, einen Beweis zu kennen, ihm sogar Schritt für Schritt folgen zu können und doch nicht zu verstehen, was der zugehörige Satz aussagt. Damit stellt sich also die Frage, ob und wie relevant ein Beweis für das Verstehen ist.

> „Und das hängt wieder damit zusammen, daß man einen mathematischen Satz grammatisch richtig bilden kann ohne seinen Sinn zu verstehen.“

Dieser Aussage können wohl viele Lehrende aufgrund der eigenen Erfahrungen zustimmen! Einen mathematischen Satz grammatikalisch richtig bilden, kann z. B. durch pure Nachahmung geschehen, ohne dass sich Grundvorstellungen oder fundamentale Ideen gebildet hätten.

> „Wann versteht man ihn nun? – Ich glaube: wenn man ihn anwenden kann. Man könnte vielleicht sagen: wenn man ein klares Bild von seiner Anwendung hat. Dazu aber genügt es nicht, daß man ein klares Bild mit ihm verbindet. Vielmehr wäre besser gewesen zu sagen: wenn man eine klare Übersicht von seiner Anwendung hat. Und das ist auch schlecht, denn es handelt sich nur darum, daß man die Anwendung nicht dort vermutet, wo sie nicht ist; daß man sich von der Wortform des Satzes nicht täuschen läßt."

> „Es gibt da, glaube ich, Fälle in denen Einer den Satz (oder Beweis) zwar anwenden kann, über die Art der Anwendung aber nicht klar Rechenschaft zu geben im Stande ist. Und der Fall, daß er den Satz auch nicht anzuwenden weiß. (Multiplikativ-Axiom[5])"

Nun ist also auch nach Wittgenstein durch die [korrekte] Anwendung des Satzes nicht zweifelsfrei festgestellt, dass ein Verstehen des Satzes vorliegt. Auch dies stimmt wieder mit schulischen Erfahrungen – man denke dabei an die Berechnung eines bestimmten Integrals – überein.

> „Man möchte sagen, das Verständnis eines mathematischen Satzes sei nicht durch seine Wortform garantiert, wie im Fall der meisten nicht-mathematischen Sätze. Das heißt – so scheint es – daß der Wortlaut das *Sprachspiel* nicht bestimmt, in welchem der Satz funktioniert."

> „Die logische Notation verschluckt die Struktur."

Somit zeigt sich, dass Wittgensteins Ausführungen zufolge das Verstehen eines Satzes weder durch die Kenntnis seines Beweises noch durch die Kenntnis seiner Anwendungen garantiert ist. Auch die Kenntnis der „Wortform" des mathematischen Satzes garantiert kein Verständnis.

[5] Auswahlaxiom

Wittgenstein meint nun weiters, dass sich Verstehen auf verschiedene Art und Weise manifestiere [Flo, S. 111]. Er schlug vor, dass der Verstehensbegriff – gemeinsam mit Begriffen wie *Beweis*, *Wahrheit*, *Bedeutung*, *Mathematik*, *Zahl*, *Sprache* und *Spiel* – den Charakter der „*Familienähnlichkeit*“ hat, d. h. obwohl möglicherweise keine Eigenschaft auf jede einzelne Instanz des allgemeinen Begriffs zutrifft, genügen überlappende Ähnlichkeiten von Fall zu Fall genügen, um die einzelnen Instanzen zu verbinden. Die Absicht seiner Diskussion war es, zu erforschen, in welchem Ausmaß der Begriff des *völligen* oder *vollständigen Verstehens* eines Satzes an sich eine potentiell irreführende Idealisierung, speziell für den Logiker, vielleicht auch in unserem Fall für die Didaktikerinnen und Didaktiker, darstellt [Flo, S. 111].

Im Original von Juliet Floyd [Flo, S. 111]:

> “Wittgenstein suggested, famously, that the notion of *understanding* – along with such notion as *proof, truth, meaning, mathematics, number, language,* and *game* – has a “family resemblance” character, in that, though no one characteristic might belong to every instance of the general notion, overlapping similarities from case to case would suffice to tie the instances together. His discussion was intended to explore the extent to which notion of *full* or *complete understanding* of a sentence is itself a potentially misleading idealization, especially for the logician.”

Sie listet nun folgende Arten des Verstehens auf [Flo, S. 111]:

(1) Verstehen einer „particulare linguistic form“, beispielsweise einer Aussage der Form „2 + 2 = 4“.
(2) Verstehen als eine charakteristische Erfahrung eines Moments: „Aha!! Now I get it!!!“
(3) Verstehen zeigt sich manchmal auch in der Fähigkeit, es bzw. etwas unverzüglich also ohne zu zögern, auszusprechen bzw. zu memorieren. Beispielswiese auswendig gelernte Einmaleinstabellen.
(4) Bisweilen weist die Fähigkeit, etwas in einen allgemeinen, systematischen Kontext von Definitionen und Beweisen zu setzen, auf Verstehen hin.
(5) Manchmal offenbart sich Verstehen von etwas auch in erfolgreichem Lehren und Kommunizieren sowie im „defend it to another“ [Flo, S. 111].

Als Lehrende wird mir ein Verstehen gemäß (1) und (3) mitunter genügen, zum Beispiel dann, wenn das Unterrichtsziel darin besteht, dass Schüler und Schülerinnen eine Aussage der Form $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c$ in ihrer Bedeutung erkennen, selbst unverzüglich produzieren können und auch in der Form verstehen, dass $\left(\frac{x^3}{3} + c\right)' = x^2$ ist.

Verstehen der Art (2) wird vermutlich nicht nur uns Lehrende, sondern auch Lernende erfreuen. Die Art und Weise des Verstehens, wie sie in (4) dargestellt ist, erscheint mir eine anzustrebende zu sein. Die fünfte hier aufgelistete Art und Weise des Verstehens sollte für Lehrende höchstes Gebot sein und lässt sich immer wieder auch bei Lernenden aufspüren.

Ob und wie im Unterricht ein Verstehen im Sinne von (4) und (5) erreicht werden kann, ist an dieser Stelle allerdings noch nicht geklärt. Ebenso ist noch unklar, was und wie der Einsatz des Computers zur einen oder anderen Art des Verstehens beitragen kann. Ich denke und berufe mich dabei auf meine Erfahrungen aus der täglichen Schulpraxis, dass er (der Computer) vor allem durch seine unglaubliche Vielfalt der Visualisierung ein Verstehen, wie in (2) beschrieben, fördern kann und auch beim erfolgreichen Lehren stellenweise förderlich ist. Das folgende Beispiel soll illustrieren, wie mit einem einfachen dynamischen Arbeitsblatt – erstellt mit GeoGebra – die Bedeutung der Parameter k und d bei linearen Funktionen visualisiert werden und somit das Verständnis dafür im Sinne von (2) gefördert werden kann. Gezeigt wird im Folgenden ein eingefrorener Ausschnitt des Arbeitsblattes.

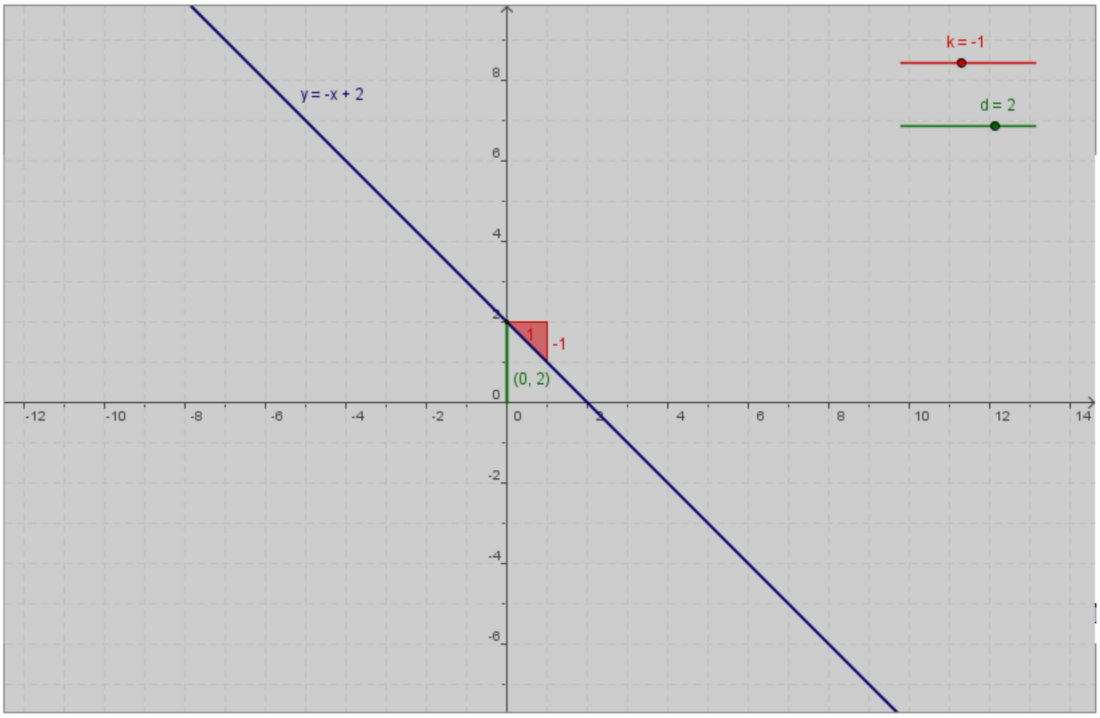
Lineare Funktionen – Die Bedeutung von k und d

Die Funktionsgleichung linearer Funktionen ist immer von der Gestalt y = kx + d. Dabei nennt man **k** die Steigung und **d** den Abstand der Funktion vom Ursprung aus auf y-Achse.

Ist k<0, so ist die Funktion fallend.
Ist k>0, so ist die Funktion steigend.
Ist k=0, so ist die Funktion konstant.

Ist d = 0, so nennt man die Funktion homogene lineare Funktion,
ist d ≠ 0, spricht man von einer inhomogenen linearen Funktion.

Wenn du den roten Schiebregler bewegst, kannst du k verändern.
Wenn du den grünen Schieberegler bewegst, kannst du d verändern.

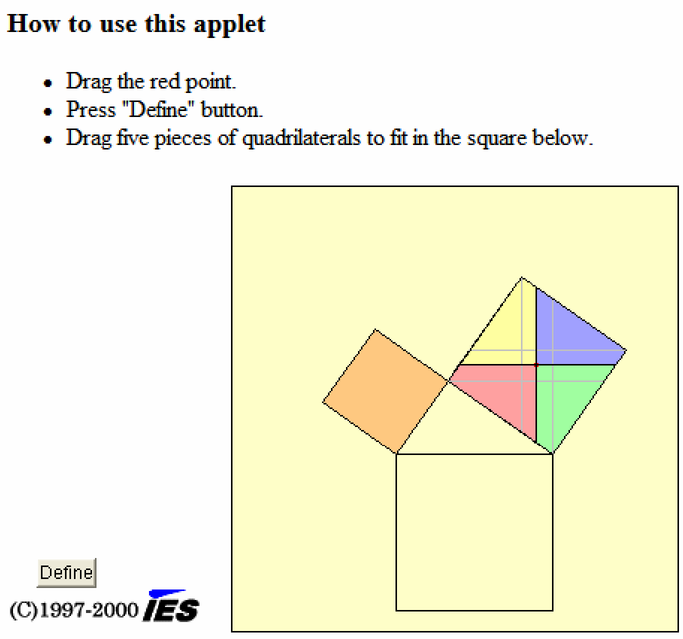


Mithilfe dieses Arbeitsblattes, das sicher nicht zu Beginn der Thematik bearbeitet werden sollte, haben die Schüler/innen also die Möglichkeit, k und d selbstständig zu variieren. Sie können dabei die Auswirkungen ihrer eigenen Manipulationen am Graphen der

Funktion und an der Funktionsgleichung beobachten. Damit kann zweifellos zum Verständnis linearer Funktionen beigetragen werden.

Dieses Beispiel zeigt bereits, dass der durch den Computer ermöglichten Interaktivität große Bedeutung beim Verstehen von Mathematik zukommen kann. Dabei ist es wichtig, dass interaktive „Übungen“ die Schüler/innen zum Experimentieren an- bzw. verleiten, dass sie überdies Denkprozesse in Gang setzen und oft mit Kommunikationsprozessen gekoppelt sind. Daher möchte hier nun noch ein weiteres Beispiel, nämlich die Auseinandersetzung mit einem Zerlegungsbeweis des Satzes von Pythagoras, anführen, das zum Experimentieren verleitet und Denkprozesse in Gang setzt. Der Kommunikationsprozess wird durch die in der Aufgabenstellung verankerte Partnerarbeit ermöglicht.

Die Schüler/innen sollen diesen Beweis, der als interaktives Applet zur Verfügung steht, selbst interaktiv nachvollziehen und ihn mit einem vorgefertigten Arbeitsblatt, das analog zum Applet gestaltet ist, nachlegen. Die folgende Abbildung zeigt die Ausgangssituation dieses Applets.



Quelle: http://www.ies.co.jp/math/java/geo/pytha2/pytha2.html gültig am: 23.09.2007

Neben der aktiven und interaktiven Auseinandersetzung mit diesem Applet und Arbeitsblatt sind die Schüler/innen angehalten, den Prozess mit eigenen Worten und wenn möglich auch mit Variablen schriftlich festzuhalten.

Die diesbezüglichen Evaluationsergebnisse (siehe Abschnitt 7.2.4.1) zeigen, dass diese Aufgabenstellung für das Verstehen im Sinne von (4) des Satzes hilfreich war. Weitere Zeugnisse für den Beitrag des Computers zum Verstehen legen die Evaluationsergebnisse des Projekts „Medienvielfalt im Mathematikunterricht“, die ausführlich in Kapitel 7 dargelegt sind, ab.

4.4 Ausblick: Konsequenzen für die Didaktik

In einer Fülle wissenschaftlicher Arbeiten wurde versucht, das Verstehen von Mathematik theoretisch und empirisch zu klären. Der von mir im Vorangehenden umrissene Ausschnitt soll durch die Präsentation einiger didaktischer Forderungen bzw. Leitlinien abgerundet werden.

Wie bereits ersichtlich wurde, scheint es einigermaßen schwierig zu sein, den Verstehensbegriff zu präzisieren. Dies liegt möglicherweise auch daran, dass bei der Klärung dieses Begriffs ein subjektives Erlebnis mit „objektiv“ beobachtbaren Prozessmerkmalen verknüpft wird [Hey, S. 211]. In der Alltagssprache hingegen wird mit dem Verstehensbegriff selten ein Denkprozess beschrieben, viel mehr wird mit dem Verstehen oder Nichtverstehen das Ergebnis eines Denkprozesses bewertet. Dennoch besteht zumindest in der Wissenschaft weitgehender Konsens über folgende Grundeinsichten:

- Wenn Verstehen stattfindet, dann wird eine neue Verknüpfung zwischen (zum Teil) bestehenden Wissenselementen hergestellt. Dabei werden neue Erfahrungen mit vorhandenem Wissen in Beziehung gesetzt oder vorhandenes Wissen wird durch den Prozess des Verstehens umstrukturiert [Hey, S. 211].
- Wenn Verstehen stattfindet, dann geht dies auch immer einher mit dem Erleben von Sinn [Hey, S. 212]. Diese Tatsache wird auch durch die im Abschnitt 4.1 dargestellten Äußerungen von Schülern und Schülerinnen deutlich.

Verstehen ist in seinem subjektiven Aspekt ein mentales Erlebnis, dessen „objektives“ Korrelat mit verschiedenen Modellen je nach vorliegender Situation, gegebenem Inhalt und bestehender Befindlichkeit unterschiedlich gut beschrieben werden kann. Die Person, die versteht, bewertet ihren eigenen kognitiven Prozess, wenn sie davon spricht, etwas verstanden zu haben. Die geistigen Anstrengungen, die zum Verstehen geführt haben, münden gegebenenfalls im Erleben von Sinn. Beim Verstehen bedarf es aber neben einem verstehenden Subjekt auch eines Objekts, Heymann meint in diesem Zusammenhang: „*Verstehen ist für das verstehende Subjekt Weltaneignung.*“ [Hey, S. 213]. Nicht zu vernachlässigen ist schließlich auch die soziale Komponente des Verstehens, denn nur mittels sozialer Kommunikation kann man sich vergewissern, etwas verstanden zu haben [Hey, S. 215].

Einige grundlegende Gesichtspunkte für einen Verständnis fördernden Mathematikunterricht hat H.J. Vollrath in pointierter Weise zusammengefasst. Dazu unterscheidet er zwei Qualitäten des Verstehens, nämlich *formale* und *inhaltliche* Qualitäten [Vol2, S. 27]. Er zieht am Ende seiner Betrachtungen in „*Paradoxien des Verstehens von Mathematik*“ [Vol2] das Resümee, dass Patentantworten über optimale Wege zum Verstehen nicht zu erwarten sind [Vol2, S. 27], dass allerdings die folgenden Paradoxien und die sich daraus ergebenden didaktischen Konsequenzen hilfreiche Leitlinien für einen Verständnis fördernden Unterricht sein.

Zunächst liefert die Betrachtung der *formalen* Qualitäten des Verstehens durch Mathematik die ersten drei Paradoxien:

(1) *„Man kann das Allgemeine nur verstehen, wenn man das Besondere verstanden hat. Man kann jedoch das Besondere nur verstehen, wenn man das Allgemeine verstanden hat.“* [Vol2, S. 8]

(2) *„Man kann das Ganze nur verstehen, wenn man die Einzelheiten verstanden hat. Man kann die Einzelheiten nur verstehen, wenn man das Ganze verstanden hat.“* [Vol2, S. 13]

(3) *„Strenge Überlegungen kann man nur verstehen, wenn man bereits anschauliche Vorstellungen davon hat. Angemessene anschauliche Vorstellungen können sich nur aus strengen Beobachtungen entwickeln.“* [Vol2, S. 18]

Aus diesen Paradoxien ergeben sich für Vollrath folgende didaktische Konsequenzen:

(1) Im Unterricht ist im Besonderen das Allgemeine sichtbar zu machen und beim Verallgemeinern ist so vorzugehen, dass das Besondere gesehen wird. [Vol2, S. 8]

Lehrende und Lernende sollten einerseits vermeiden sich in den Details des Besonderen zu verfangen, andererseits muss das Allgemeine durch einen bewussten reflektierenden Denkprozess als etwas Neuartiges erarbeitet werden. Ebenso regt Vollrath an, das didaktische Prinzip „Vom Besonderen zum Allgemeinen“ zu relativieren, da es nicht immer und überall anwendbar scheint. [Vol2, S. 8 ff.]

(2) Mathematisches Lehren muss auf das Ganze bezogen sein. Benötigtes Wissen über die Einzelheiten muss von den Lernenden als für das Ganze relevantes Wissen erkannt und von ihnen selbst erworben werden. [Vol2, S. 15]

(3) Mathematisches Denken und Handeln im Unterricht muss sich auf Anschauung gründen. Aber Mathematik darf nicht in einer bloßen Anschaulichkeit verhaftet bleiben, sondern Begriffsbildung und Begründungen bedürfen angemessener Strenge. [Vol2, S. 19]

Zu den *inhaltlichen* Qualitäten des Verstehens durch Mathematik nennt Vollrath zwei weitere Paradoxien.

(4) „Man kann Mathematik in ihrer Reichhaltigkeit nur verstehen, wenn man ihren Kern verstanden hat. Man kann den Kern von Mathematik nur verstehen, wenn man ihre Reichhaltigkeit verstanden hat.“ [Vol2, S. 21]

(5) „Verstehen ist ein Prozess, der Verständnis als Resultat anstrebt. Verstehen ist aber ohne Verständnis nicht möglich.“ [Vol2, S. 24]

Die dementsprechenden didaktischen Konsequenzen lauten:

(4) Im Unterricht muss sich der Beziehungsreichtum von Mathematik den Schülern und Schülerinnen erschließen und der Mathematikunterricht muss immer wieder zum Kern mathematischer Betrachtungen vorstoßen. [Vol2, S. 21]

(5) Mathematikunterricht muss auf Verstehen ausgerichtet sein. Verstehen darf im Unterricht nicht ausschließlich als anzustrebender Endzustand, sondern muss als ständig fortschreitender Prozess erkannt und entwickelt werden. [Vol2, S. 24]

5. Computer im Mathematikunterricht

Der Einsatz des Computers bzw. der „Neuen Medien“ im Mathematikunterricht bildet schon geraume Zeit einen Forschungsschwerpunkt vieler Didaktikerinnen und Didaktiker. Immer wieder werden vor allem in Printmedien unterschiedlichste Meinungen, Forschungsergebnisse und Ansichten zum Computereinsatz in der Schule und zu den Folgen der Nutzung des Computers von Kindern und Jugendlichen im Allgemeinen veröffentlicht.

Ungeachtet der Tatsache, dass die Handhabung des Computers mittlerweile eine Kulturtechnik ist, wurde im Dezember 2005 in den Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik ein Interview mit Manfred Spitzer (Neurologe, Universität Ulm) veröffentlicht, das den Titel „Wer seinem Kind Gutes tun will, kaufe ihm bitte keinen Computer“ trägt. Des Weiteren wird ebendort publiziert, dass Computer zu schlechteren Noten führen können [GDM, S. 105], ebenso wird die Meinung vertreten, dass der Computer oft andere effektive Unterrichtsformen verdrängt und der Forderung nach noch mehr Computern an der Schule wird mit Missfallen gegenüber getreten. Dem halten jedoch einige Forscher/innen entgegen, dass heute nicht unbedingt mehr Computer in den Schulen benötigt werden, sondern vielmehr deren wirkungsvollerer Einsatz anzustreben ist [GDM, S. 106], Letzteres ist auch mein Ziel.

Manfred Spitzer zitiert in seinem Interview unter anderem die PISA-Studie mit folgenden Worten: „*Viele Studien haben untersucht, welche Folgen es hat, wenn ein junger Mensch mehrmals im Monat, einmal in der Woche oder fast jeden Tag vor dem Computer sitzt. »Fast jeden Tag« schnitt dabei deutlich schlechter ab als »einmal in der Woche«. […] Auch bei der Auswertung der PISA-Daten wurde ermittelt, dass das Vorhandensein eines Computers in der Schule oder im Haus den Lernerfolg nicht verbessert oder ihn sogar negativ beeinflusst.*“ [GDM1, S. 109 f.].

Andere Daten bzw. Ergebnisse finden wir hingegen in Österreichs Printmedien. Lisa Nimmervoll schreibt im Standard vom 25. Jänner 2006, dass im OECD-Schnitt Jugendliche, die den Computer nie oder seltener als einmal pro Monat daheim nutzen, weniger Punkte bei den Mathematikergebnissen von PISA 2 erreichen, als Jugendliche, die den Computer zwischen einmal pro Woche und einmal pro Monat nutzen. Jugendliche, die den PC zuhause täglich nützen, haben sogar die höchste Punkteanzahl bei den Mathematikergebnissen erreicht [Nim, S. 6].

Ob nun der Einsatz des Computers im Unterricht und/oder die Nutzung des PC zuhause bei österreichischen Schülern und Schülerinnen wirklich zu anderen Ergebnissen als bei deutschen Jugendlichen, die im Interview von Spitzer angesprochen werden, führt, werde ich hier nicht zu klären versuchen, da ja diese Frage nicht im Forschungsinteresse dieser Arbeit steht. Was aber zweifelsohne in deren Forschungsinteresse steht, ist der wirkungsvolle, d. h. der verständnisfördernde und allgemein bildende Einsatz des Computers im Mathematikunterricht. Bevor ich allerdings der Frage nachgehe, wie denn der Computer bzw. die „Neuen Medien" auf diese Weise im Unterricht eingesetzt werden können, möchte ich eine Übersicht über die wichtigsten der [derzeitig[6]] grundlegenden Werkzeuge geben.

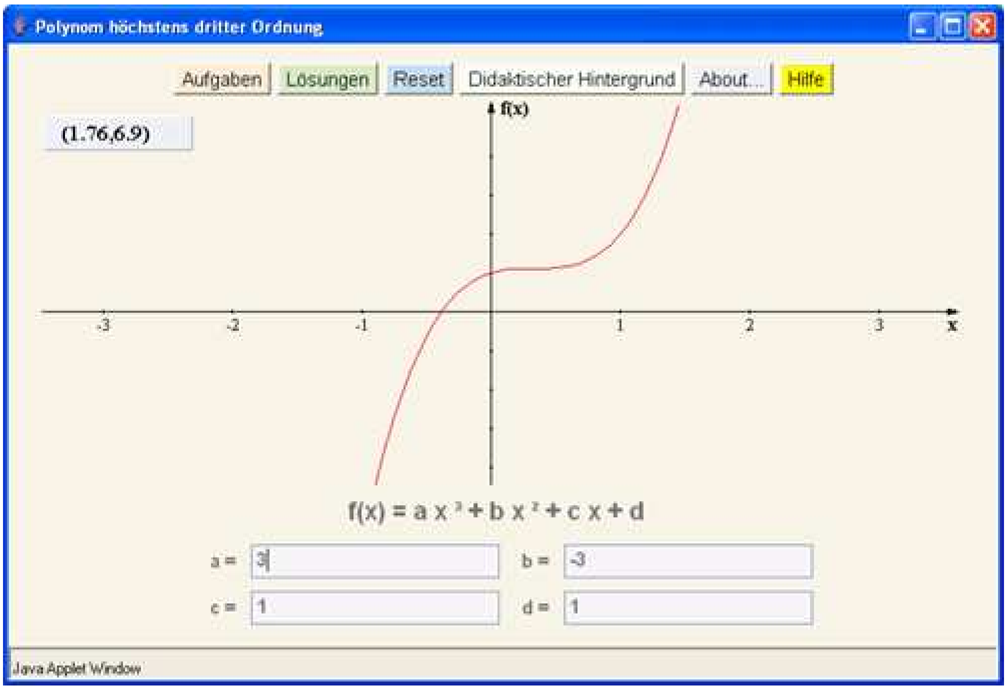
5.1 Funktionsplotter

Die historische Entwicklung des Funktionsplotters[7] samt seiner methodischen Möglichkeiten wurde von Horst Hischer in „Mathematikunterricht und Neue Medien" [Hi1] hervorragend zusammengefasst. Dies erlaubt mir, hier den Fokus vor allem auf die unterschiedlichen Ausprägungen der Funktionsplotter zu richten sowie Möglichkeiten und Grenzen des Funktionsplottens mit dem neuen Texas Instruments Werkzeug TI-Nspire™ CAS aufzuzeigen.

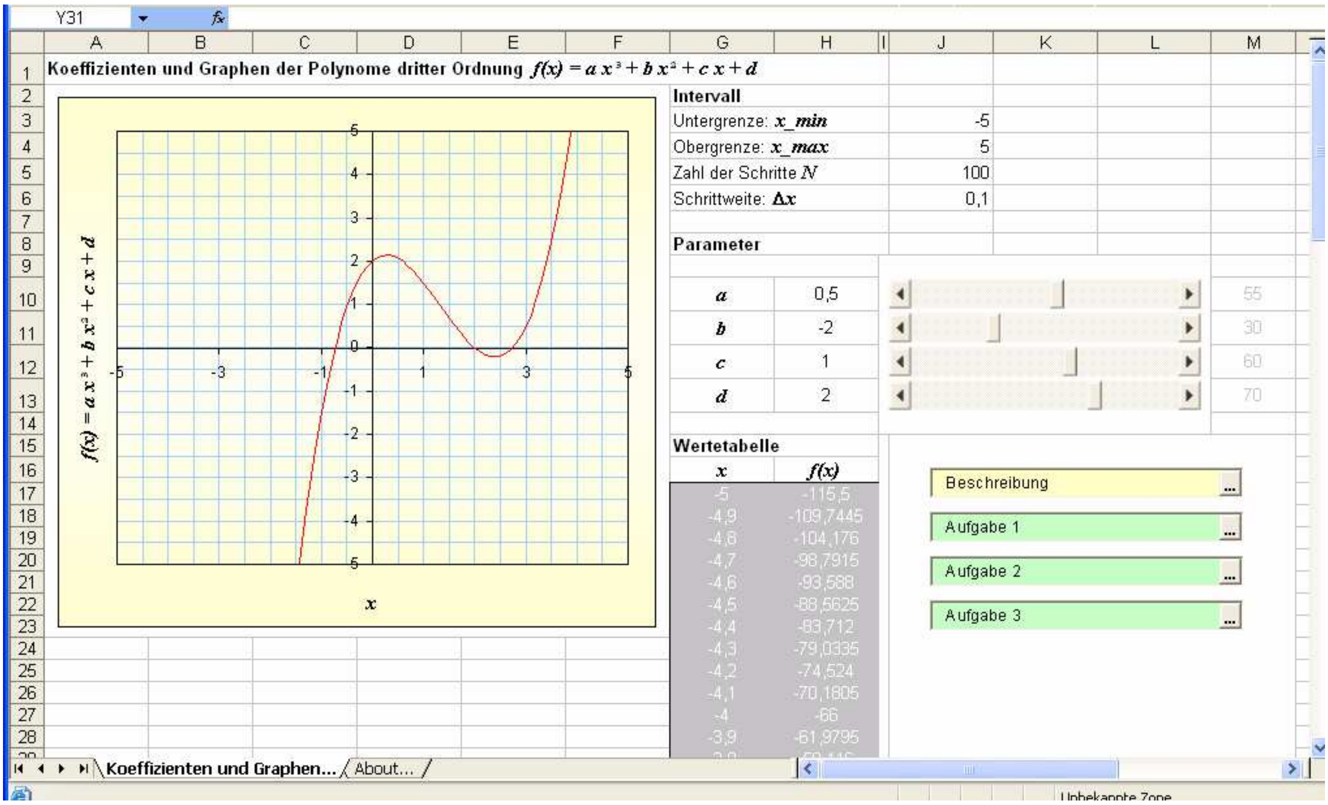
Funktionsplotter wurden erst mit der Möglichkeit, Parameter dynamisch zu variieren, für den Mathematikunterricht interessant. Die „dynamische" – am besten stufenlose – Variation der Parameter ermöglicht es, ihren Einfluss auf die Form und Lage des Funktionsgraphen visuell und interaktiv erlebbar zu machen [Hi2, S. 249]. Die Variation der Parameter lässt sich mit Tabellenkalkulationen, Schiebereglern, Computeralgebrasystemen, manchen Dynamischenen Geometriesystemen und einigen anderen Programmen bestens verwirklichen. Auch im Internet sind derartige Funktionsplotter zu finden. Einige Beispiele, vor allem solche, die an österreichischen Schulen einigermaßen bekannt und verbreitet sind, möchte ich hier kurz vorstellen.

[6] Die raschen Weiterentwicklungen und ständigen Neuerungen im Bereich der neuen Medien erlauben mir nur ein begrenztes Ausmaß an Aktualität.
[7] Plotter (englisch) = Planzeichner

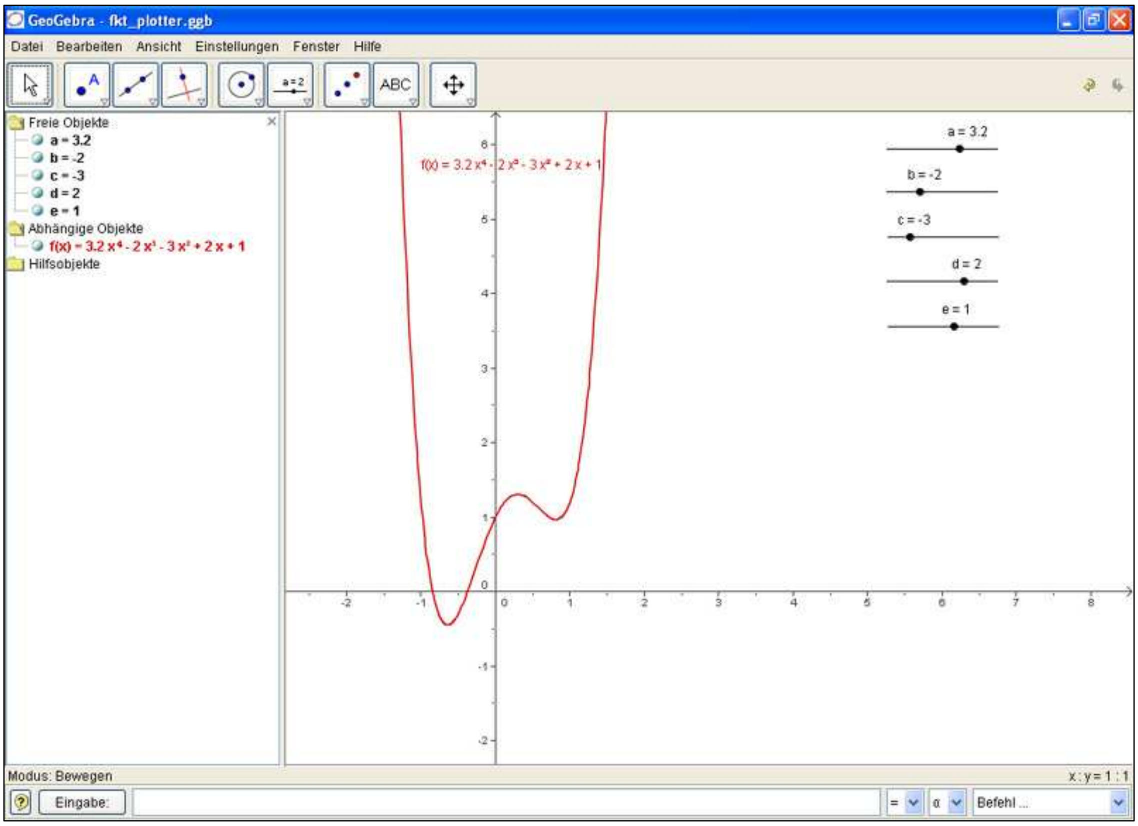
Das folgende Java-Applet aus www.mathe-online.at erlaubt den Benutzern und Benutzerinnen die numerische Eingabe der Koeffizienten a, b, c und d der Polynomfunktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ und zeigt den Graph der dadurch gegebenen Funktion an.



Damit stellt mathe-online einen brauchbaren, aber nicht besonders „guten" Funktionsplotter zur Verfügung. Nach Hischer zeichnet sich nämlich ein *guter Funktionsplotter* dadurch aus, dass die Konstantenvariation interaktiv und mausgesteuert ist [Hi2, S. 250]. Ein solch guter Funktionsplotter, erstellt mit einem Spreadsheet, ist ebenfalls bei mathe-online zu finden. Er kann ohne jegliche Excel-Kenntnisse für Polynome dritter Ordnung verwendet werden und mit entsprechenden Excel-Kenntnissen für beliebige Funktionstypen adaptiert werden. Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt wiederum für den Funktionstyp $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.



Auch mit GeoGebra können Lehrende einen *guten* Funktionsplotter (siehe nachfolgende Abbildung) selbst erzeugen.

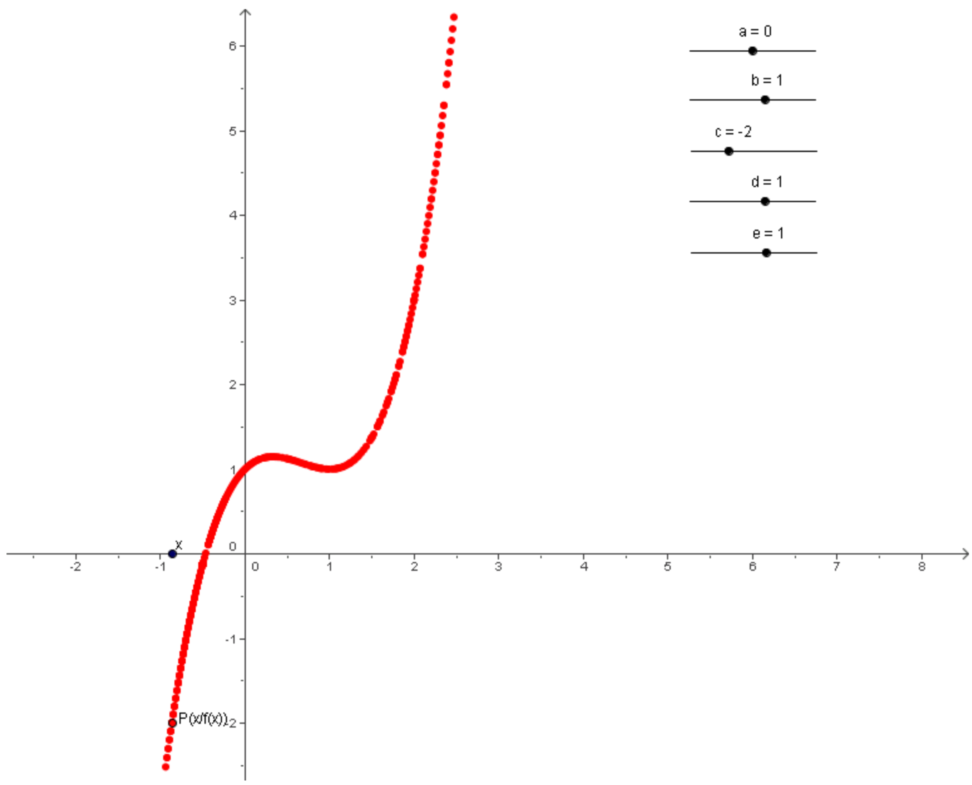


Die mausgesteuerte Variation der Parameter wird nicht nur durch Veränderung des Funktionsgraphen, sondern auch durch sofortige Änderung des Funktionsterms im Algebrafenster ersichtlich.

Eine umfassende Kenntnis dieser Software zur Erstellung eines derartigen Plotters ist nicht nötig.

Einige Dynamische Geometriesysteme sind nach Hischer sogar „mächtige Werkzeuge“ [Hi2, S. 257]. Hischer unterscheidet *Werkzeuge* und *Hilfsmittel*. Ein *Werkzeug* muss zumindest in einem bestimmten Bereich vielseitig einsetzbar sein [Hi2, S. 241], wie beispielsweise ein CAS. Ein *Hilfsmittel* hingegen ist weniger vielseitig und meist nur für einen Zweck konstruiert worden [Hi2, S. 241]. Ein Funktionsplotter, der nur die Veranschaulichung und Parametervariation fest implementierter Funktionsterme erlaubt, ist ein „ohnmächtiges Hilfsmittel“ [Hi2, S. 242], das bloß für einen festen vorgegebenen Zweck verwendbar ist.

Hischer verdeutlicht weiters die Mächtigkeit eines Funktionsplotters, der mit einer Dynamischenen Geometriesoftware erstellt wurde, an einem Beispiel, welches ich hier in ähnlicher Weise mit Geogebra realisiert habe.

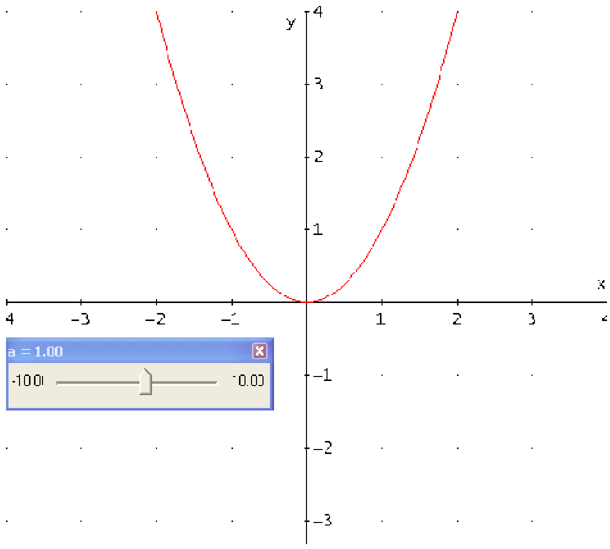


Dabei ist zu beachten, dass die Abbildung nur einen Ausschnitt des „eingefrorenen“ Beispiels zeigt. Zu Beginn sind nur das Koordinatensystem, der „Abszissenpunkt“ x, der Punkt P und die Schieberegler sichtbar. Mit den Schiebreglern kann je nach Bedarf ein bestimmter Funktionsterm ausgewählt werden. Bei interaktiver Bewegung des „Abszissenpunktes“ x, der an die x-Achse gebunden ist, bewegt sich P auf der gedachten (ausgewählten) Funktion und der zugehörige Funktionsgraph wird mittels Aufzeichnung der Spur sichtbar gemacht. Werden die Formvariablen variiert, so verändert der Punkt P seine Lage und der neue Funktionsgraph kann wieder mittels Aufzeichnung der Spur sichtbar gemacht werden.

Ein derartiges Lernobjekt[8] kann – eingebettet in entsprechende Aufgabenstellungen – den Verstehensprozess hinsichtlich des Einflusses von Formvariablen auf Form und Lage des Funktionsgraphen fördern. Dabei hat die Aufgabenstellung für den Verlauf des Verstehensprozesses zumindest die gleiche Bedeutung und Wichtigkeit wie das Lernobjekt.

Dass, wie schon zuvor erwähnt, die interaktive mausgesteuerte Parametervariation einen guten Funktionsplotter auszeichnet, möchte ich hier noch an zwei weiteren Beispielen, die sich vor allem mit an Schulen gängigen Softwareprodukten leicht erstellen lassen, aufzeigen.

Das Computeralgebrasystem Derive™ bietet seit der Version 6 auch eine annähernd kontinuierliche Parametervariation mittels Schiebereglern. Ein Schieberegler[9] wird im Graphik-Fenster erzeugt und bei dessen Erstellung mit einem Variablennamen, einem Minimal- und Maximalwert und einer Schrittweite (= Anzahl der möglichen Variationen) belegt. Der im Algebra-Fenster definiert Funktionsterm kann somit durch Betätigung des Schiebreglers im Graphik-Fenster verändert werden.

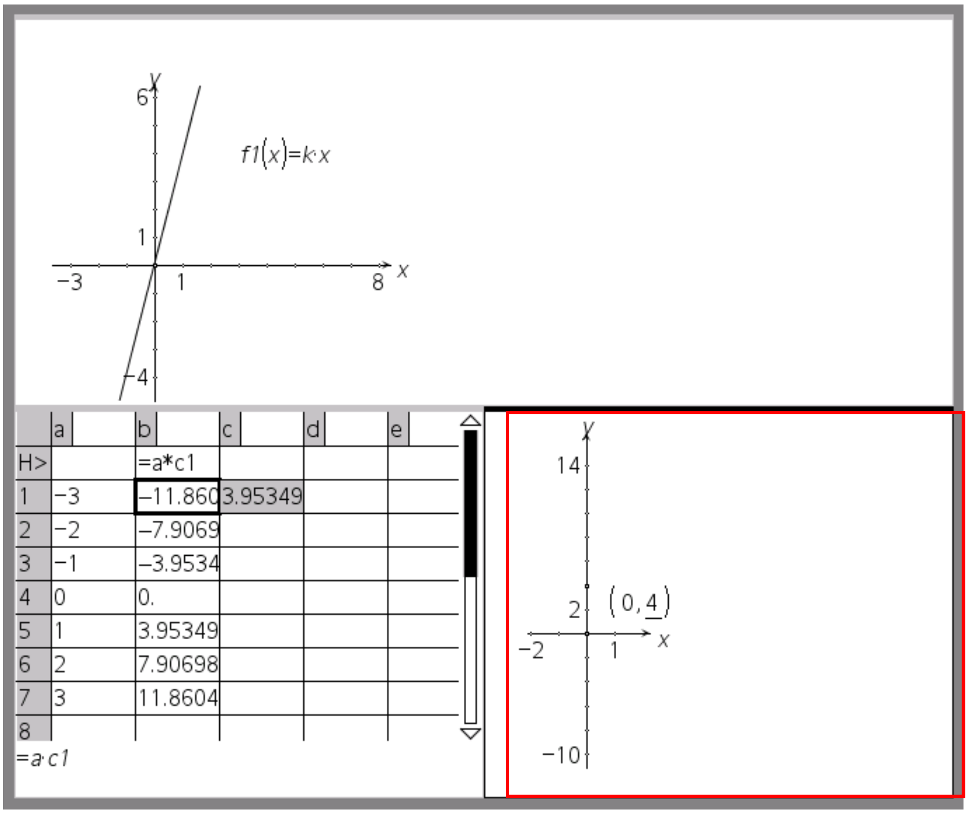


Die nebenstehende Abbildung zeigt wieder nur ein eingefrorenes Bild.

[8] Gemäß dem eContent Erlass des bm:bwk wird die kleinste Einheit einer eContent-Entwicklung als Lernobjekt definiert. Z. B.: Arbeitsblatt, Java-Applet (http://www.e-teaching-austria.at/Erlass/index.html)

Ein wesentlicher Nachteil gegenüber anderen bereits genannten Funktionsplottern scheint mir jener zu sein, dass der Funktionsterm die Veränderung des Parameters nicht widerspiegelt und die Variationen nicht kontinuierlich erfolgen.

Das seit dem Sommersemester 2006 lancierte neue Produkt TI-Nspire™ CAS, das mir in einer Testversion[10] zur Verfügung steht, beinhaltet die Möglichkeit Hilfskonstruktionen zu erstellen, die mit Schiebereglern vergleichbar sind. Es ist jedoch anzunehmen, dass in einer endgültigen Version Schieberegler als solche vorhanden sein werden.



Die obige Abbildung zeigt wiederum nur den Ausschnitt eines „eingefrorenen" Beispiels. Im rechten unteren Fenster kann der Punkt mit den hier abgebildeten Koordinaten (0|4), dessen y-Koordinate die Steigung der im oberen Fenster ersichtlichen linearen Funktion angibt, verschoben werden. Mit der Verschiebung bzw. der Variation des Punktes im unteren rechten Fenster verändert sich nicht nur die Lage der im oberen Fenster gezeigten Geraden, sondern auch die im linken unteren Fenster angezeigten Funktionswerte, wobei – wie hier zu sehen ist – nicht mit dem im rechten unteren Fenster gerundeten, sondern dem exakten Wert gerechnet wird.

---

[9] Es können auch mehrer Schieberegler wie in den vorhergehenden Beispielen verwendet werden.
[10] April 2006

Es ist also möglich, mit dem TI-Nspire™ CAS einen nach Hischer guten Funktionsplotter zu erzeugen, der es erlaubt, die Auswirkungen der veränderten Parameter nicht nur am Graphen, sondern auch an der Wertetabelle zu studieren.

Auf eine weitere detaillierte Besprechung der derzeit vorhandenen Funktionsplotter möchte ich hier verzichten, da sie zum einen bei Hischer [Hi2, S. 246 ff.] erfolgt ist und zum anderen die Idee dieses nützlichen Werkzeugs für meine Zwecke bereits ausreichend illustriert wurde.

5.2 CAS im Mathematikunterricht

Der Einsatz von Computeralgebrasystemen (kurz: CAS) hat vor allem im österreichischen Mathematikunterricht lange Tradition, eine sehr übersichtliche Auflistung dieser und auch internationaler Entwicklungen findet sich in Edith Schneiders „Computeralgebrasysteme in einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht“ [Schn, S. 41]. Weitere Recherchen zeigen, dass es zum Einsatz von CAS im Mathematikunterricht eine enorme Fülle von Unterrichtsvorschlägen und Materialien sowie zahlreiche in ihrer Qualität ganz unterschiedliche Dokumentationen und Erfahrungsberichte gibt. Da hier nicht ausreichend Platz für eine breit angelegte Erörterung und Diskussion der zur Verfügung stehenden Literatur ist, möchte ich mich auf einige wenige wichtige aber dafür zentrale Aspekte beschränken, nämlich CAS-Darstellungen, die Window-Shuttle-Technik und die Begriffe Black Box/White Box und CAS-Module.

Edith Schneider konstatiert, dass sich die Arbeiten zum Einsatz von CAS recht deutlich nach ihrer Grundorientierung unterscheiden [Schn, S. 43]. Dabei orientieren sich viele Arbeiten und Unterrichtsprojekte am traditionellen Mathematikunterricht und eine Dominanz des Operativen ist feststellbar [Schn, S. 44 ff.]. Vorrangiges Ziel dabei ist das leichtere Erreichen von traditionellen Inhalten. CAS werden hierbei meist zur Unterstützung verwendet, die Argumente für deren Einsatz lauten [Schn, S. 47 ff.]:

- Leichte Verfügbarkeit von grafischen Darstellungen und die Möglichkeit, zwischen verschiedenen Darstellungsformen zu wechseln.
- Experimentelle Zugänge.
- Einsatz von Modulen.
- Entlastung von operativen Tätigkeiten.

Ebenso häufig anzutreffen wie umstritten ist eine Orientierung, die die technologischen Möglichkeiten als Ausgangspunkt nimmt. Diesbezügliche Angebote und Unterrichtsvorschläge zeichnen sich dadurch aus, dass die Auswahl mathematischer Inhalte sich nach den Möglichkeiten des CAS richtet [Schn, S. 42 ff.]. Ziel ist die maximale Ausreizung und Nutzung des CAS im Unterricht, dies führt nicht selten zu überaus komplexen und anspruchsvollen Unterrichtskonzepten, deren Niveau manchmal für die Schule unbestritten zu hoch ist. Ferner bin ich davon überzeugt, dass grundsätzlich nicht die technologischen Möglichkeiten die mathematischen Inhalte, sondern die Inhalte die Wahl und Nutzung der Technologie bestimmen müssen.

Eine andersartige Form der Orientierung beim Einsatz von CAS im Unterricht – nämlich der Orientierung an didaktischen Konzepten – sieht Edith Schneider in Frankreich und den Niederlanden [Schn, S. 62 ff.]. Besondere Beachtung schenkt sie den Forschungs- und Entwicklungsarbeiten am Freudenthal Institut zum CAS-Einsatz im Mathematikunterricht, deren Theorie vornehmlich auf der „Realistic Mathematics Education (RME)“ beruht. Ausgangspunkt für das Lernen von Mathematik sollen realistische Problemstellungen sein, wobei die Lernenden den Mathematikunterricht als geführte Wiederentdeckung von Mathematik im Sinne eines genetischen Unterrichts erleben. Die Mathematisierung, aber auch die Diskussion und Kooperation als Unterstützung von Reflexion sind wichtige Bestandteile eines solchen Unterrichts. Edith Schneider meint, dass diese Theorie eine Affinität zu bestimmten Aspekten von Heymanns Allgemeinbildungskonzept aufweist, kritisiert aber, dass CAS nicht als wesentlicher Teil integriert wurde, sondern eher „additiv-unterstützend“ eingesetzt wird [Schn, S. 71].

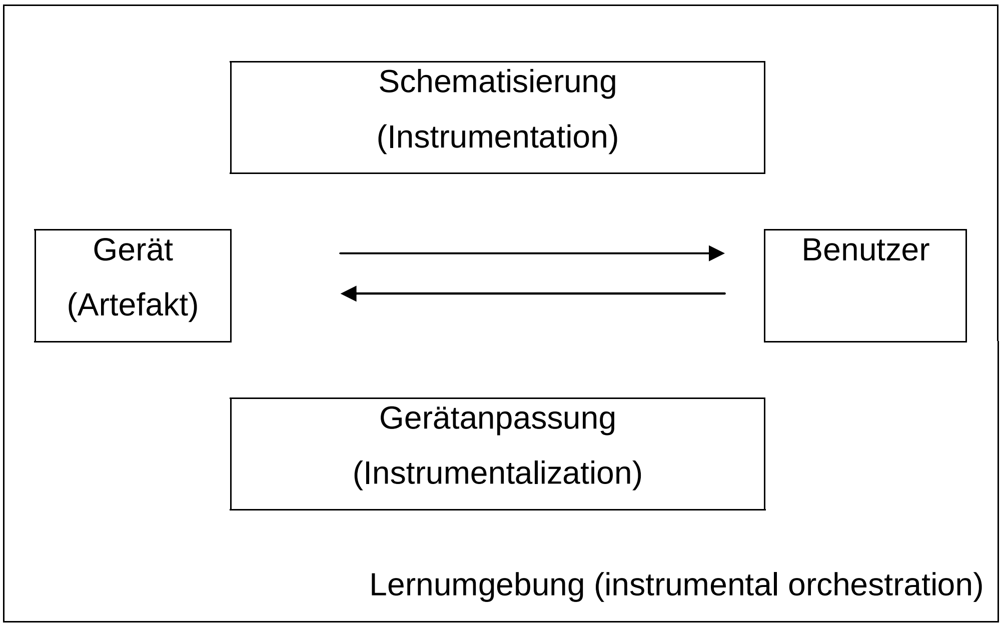
Hans-Georg Weigand sieht rückblickend auf die Geschichte des CAS im Mathematikunterricht und die damit verbundenen Diskussionen um die Bedeutung von CAS drei Phasen [Wei, S. 89 ff.]:

- *Die erste Phase*, beginnend 1988 mit der Einführung von Derive auf „Personal Computern“, war geprägt von der Frage des durch CAS hervorgerufenen Umbruchs im Mathematikunterricht [Wei, S. 89]. CAS sollte Schülerinnen und Schüler von den ständig wiederkehrenden kalkülhaften Berechnungen entlasten und Freiraum für anspruchsvollere Tätigkeiten wie das Modellieren und Interpretieren schaffen. In dieser ersten Phase wurden zahlreiche Unterrichtsvorschläge ausgearbeitet und erprobt, jedoch nur wenige wissenschaftlich evaluiert [Wei, S. 90].

- *Die zweite Phase*, beginnend 1995 mit der Einführung des TI-92, war zum einen gekennzeichnet davon, dass für Schülerinnen und Schüler der Computer in Form des TI-92 nun jederzeit verfügbar war, zum anderen wurde eben deshalb eine tief greifende inhaltliche und methodische Veränderung des Unterrichts erwartet. Besonders intensiv diskutierte man über mögliche Änderungen der Inhalte und damit auch der Prüfungen im Mathematikunterricht, da die ständige Verfügbarkeit des CAS und die damit auf Knopfdruck möglichen kalkülhaften Berechnungen dieses eben bislang zentrale Element der Unterrichtswirklichkeit stark in den Hintergrund drängte. Neben neuerlich zahlreich vorgestellten Unterrichtsvorschlägen begann nun auch die Phase der wissenschaftlich begleitenden Unterrichtsversuche sowie die Debatte um den richtigen Zeitpunkt des Einsatzes einen Taschencomputers und der Diskurs über die Bedeutung der Handrechenfertigkeiten [Wei, S. 90].

- *Die dritte Phase*, die etwa zu Beginn des neuen Jahrtausends startete, ging mit der Erkenntnis einher, dass sich der Taschencomputer in Form des TI-92 im Mathematikunterricht im Gegensatz zu Graphik-Taschenrechnern nur partiell durchgesetzt hatte. Die Gründe für die geringe Akzeptanz sind vielfältig. Weigand führt unter anderem die ausbleibende Entwicklung hin zu pädagogischen Werkzeugen, die mangelnde Vertrautheit der Lehrenden mit dem Gerät, die hohe Bedeutung der „Papier-und-Bleistift-Mathematik“, die mangelnde Integration in vorhandene Lehrpläne sowie den schnellen Versionswechsel, den hohen Preis und die Problematik des sozialen Ausgleichs an [Wei, S. 90]. Er geht davon aus, dass die Komplexität der Integration von Medien und CAS in den Unterricht unterschätzt wurde und den Veränderungen auf der technischen, inhaltlichen und methodisch-didaktischen Ebene erst seit kurzem durch die „*Theorie der instrumentellen Entwicklung*“ Rechnung getragen wird [Wei, S. 91]. Im Zentrum steht hier die Frage, „*wie ein Taschencomputer zu einem für eine bestimmte Problemlösung hilfreichen Instrument oder Werkzeug wird*.“ [Wei, S. 91]. Nach dieser Theorie ist es nötig, dass zwischen Taschencomputer und Benutzer/in eine Wechselbeziehung entwickelt wird.

Folgende Abbildung [Wei, S. 91] verdeutlicht den Grundgedanken der Theorie der instrumentellen Entwicklung.



Beim *Prozess der Schematisierung* entwickelt der Benutzer bzw. die Benutzerin mentale Modelle oder Schemata über Möglichkeiten und Grenzen des Geräts, beim *Prozess der Gerätanpassung*[11] passt sich der Benutzer bzw. die Benutzerin das Gerät entsprechend seinen/ihren Tätigkeiten an und führt beispielsweise Veränderungen von Menüs durch, definiert Befehle oder programmiert. „*In der **Entwicklung dieser instrumentellen Wechselbeziehung** wird ein Gerät zu einem **Instrument** oder **Werkzeug**, mit dem sowohl technisches Wissen oder Bedienungswissen als auch Wissen über seinen adäquaten Einsatz beim Benutzer einhergeht.*“ [Wei, S. 91]. Wichtige und zentrale Aufgabe für die Durchführung eines entsprechenden Unterrichts ist die Entwicklung von *Lernumgebungen* oder *instrumentellen Orchestrierungen*, in der die Werkzeugentwicklung vor sich geht [Wei, S. 91].

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass der Einsatz von CAS bzw. Taschencomputern im Mathematikunterricht vom Wegfall der wiederkehrenden kalkülhaften Berechnungen und der damit verbundenen Suche nach „anderen“ bzw. „neuen“ Inhalten und neuen Elementen auf der mathematik-didaktischen Ebene geprägt war und ist.

[11] Auch Heugl spricht schon von einer Anpassung des Systems (mittels Erzeugung von Modulen) an die Wünsche des Schülers bzw. der Schülerin [Heu, S. 185].

Die zentralen Ergebnisse vieler, auch österreichischer CAS-Projekte bestätigen, dass beim CAS-Einsatz das Arbeiten mit Darstellungen an Bedeutung gewinnt, vermehrt experimentell gearbeitet wird und selbsttätiges Arbeiten sowie kooperative Arbeitsformen in den Vordergrund treten [Wei, S. 92]. Möglichkeiten und Grenzen des CAS-Einsatzes möchte ich im Folgenden aufzeigen.

5.2.1 CAS-Darstellungen

E. Schneider, die selbst einen CAS Unterrichtsversuch wissenschaftlich begleitete, beschäftigt sich ausführlichst mit der durch CAS gegebenen leichten Verfügbarkeit verschiedener Darstellungsformen. Im Wesentlichen unterscheidet sie zwischen *sprachlichen* und *visuellen* Darstellungsformen, wobei letztere noch in die Bereiche ikonisch, schematisch und symbolisch unterteilt wird [Schn, S. 172 f.].

Ikonische Darstellungen definiert sie als bildhafte Darstellungen real sichtbarer Gegebenheiten. *Schematische* Darstellungen orientieren sich meist an Wahrnehmungsmustern des Referenzkontextes, fokussieren aber auf einzelne als wichtig erachtete Aspekte. Zudem unterscheiden sich schematische Darstellungen durch die erfolgte Abstraktion vom Referenzkontext. *Symbolische* Darstellungen haben den geringsten Bezug zum Referenzkontext und die verwendeten Zeichen sind weitgehend willkürlich gewählt, auch sie fokussieren auf einen ganz bestimmten Aspekt eines Sachverhalts [Schn, S. 173 f.].

Für die Mathematik, das Lernen und Betreiben von Mathematik sind Darstellungen unverzichtbar (vgl. Abschnitt 4.2.2), Darstellungen ermöglichen – so Schneider [Schn, S. 175] – Kommunikation. Mathematische Darstellungen können einerseits Mittel der Kommunikation über mathematische Inhalte sein und andererseits sind sie selbst auch Inhalt mathematischer Kommunikation [Schn, S. 176]. Ferner kann mittels schematischer und symbolischer Darstellungsformen Metawissen über Mathematik dargestellt und kommuniziert werden, solche Darstellungen ermöglichen also auch „mathematische Metakommunikation“ [Schn, S. 176].

Fuchs schreibt dem Aspekt des Visualisierens mit Algebrasystemen besondere Bedeutung zu, dabei schätzt auch er, dass die numerischen, grafischen und symbolischen

Darstellungen, die mit Computeralgebrasystemen erzeugt werden können, experimentelle Zugänge zu mathematischen Begriffen ermöglichen [Fu1, S. 13].

Dass visuelle Darstellungen zur Ideenfindung, zur Generalisierung, zur operativen Auswertung und zur Allgemeinbildung, insbesondere zum „kritischen Vernunftgebrauch“ wie auch zur „Weltorientierung“ und „Stiftung kultureller Kohärenz“ beitragen können, zeigt Schneider in ihrer Habilitationsschrift [Schn, S. 177 ff.]. Ihre diesbezügliche Argumentationskette möchte ich aus zweierlei Gründen hier wiedergegeben. Zum einen werden dadurch die obigen Begriffe verdeutlicht, zum anderen ist es für die vorliegende Arbeit unerlässlich, den Brückenschlag zur Allgemeinbildung, die ja hier ein besonderes Anliegen ist, klar sichtbar zu machen.

Ikonische Darstellungen, die oft auch als inadäquate Veranschaulichungen mathematischer Beziehungen kritisiert werden, können zwar Assoziationen hervorrufen und Ausgangspunkt für die Entwicklung schematischer Darstellungen sein, sie sind allerdings eher selten in mathematischen Texten zu finden und werden auch von CAS gar nicht angeboten [Schn, S. 177f.].

Schematische und symbolische Darstellungen sind jedoch wichtige Bestandteile jeglicher Lehrbücher und scheinen neben der der sprachlichen Darstellung besondere Bedeutung für den Lernprozess zu haben [Schn, S. 179]. Zu beachten ist, dass unterschiedliche Darstellungsformen für ein und denselben mathematischen Sachverhalt in einem gewissen Sinn äquivalent sein müssen [Schn, S. 179].

Nicht äquivalent sind allerdings Darstellungsformen hinsichtlich der unterschiedlichen Aspekte, auf die jeweils die Hauptaufmerksamkeit gelenkt wird. Dies wird von E. Schneider an einem Beispiel aus Kronfellner/Peschek „angewandte mathematik1“ (S. 100) verdeutlicht:

> **4.100** Ein Radrennfahrer fährt auf einer Rennbahn mit einer gleich bleibenden
> Geschwindigkeit von 36 km/h. Welchen Weg legt er in 1; 2; 2,5; 3; 3,5; 3,75; 4; 4,25; 4,5; 4,75; 5 Stunden zurück? Stelle die funktionale Abhängigkeit zwischen der Zeit und dem (zurückgelegten) Weg graphisch so dar, daß daraus der zwischen 0 und 5 Stunden zurückgelegte Weg zu jedem beliebigen Zeitpunkt abgelesen werden kann!

Lösung: In einer Stunde legt der Radrennfahrer 36 km zurück, in zwei Stunden 36 · 2 km … usw.

$s(1) = 36 \cdot 1 = 36$

$s(2) = 36 \cdot 2 = 72$

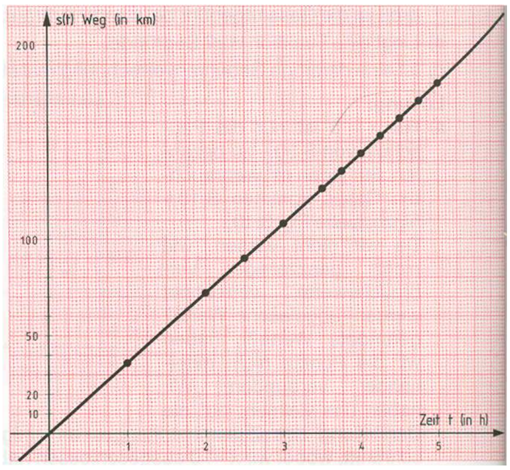
$s(2{,}5) = 36 \cdot 2{,}5 = 90$

allgemein: $s(t) = 36\,t$; Weg = Geschwindigkeit · Zeit

Wir erhalten somit folgende Tabelle:

t	1	2	2,5	3	3,5	3,75	4	4,25	4,5	4,75	5
s(t)	36	72	90	108	126	135	144	153	162	171	180

Trägt man diese Werte in einem rechtwinkeligen Koordinatensystem auf, so erhält man folgende Darstellung[12]:



Es ist offensichtlich, dass symbolische Darstellungen [hier $s(t) = 36 \cdot t$] eher den Charakter einer Rechenvorschrift haben, tabellarische Darstellungen eher auf das Konzept der Zuordnung und der Diskretisierung verweisen und grafische Darstellungen den im Beispiel verwendeten Ausdruck „gleich bleibende Geschwindigkeit" wohl am deutlichsten veranschaulichen [Schn, S. 179f.].

Der Wechsel zwischen den Darstellungsformen trägt zu einer Änderung der Sichtweise bei und ermöglicht es, ein und dieselbe Problemstellung unter verschiedenen Blickwinkeln zu betrachten, dabei können Erkenntnisse, die anhand der einen Darstellungsform

[12] Fälschlicherweise wird die Gerade hier auch für negative t gezeichnet.

gefunden wurden, auf andere Darstellungsformen übertragen werden und in vielen Fällen kann so die Einsicht vertieft werden [Schn, S. 182].

Die zweckmäßige Verwendung verschiedener Darstellungsformen kann und soll somit im Unterricht thematisiert werden, eine Reflexion der Beziehung zwischen den Darstellungsformen vermag zu einem allgemein bildenden Mathematikunterricht beizutragen. Heymann stellt fest:

> „*Verstehen mathematischer Sachverhalte heißt deshalb nicht zuletzt, die formale und referentielle Bedeutung aufeinander beziehen zu können.*“ [Hey, S. 223f.]

Damit liegen Bezüge zum „kritischen Vernunftgebrauch“ (Anleitung zum Verstehen, Mathematik als „Verstärker“ des Alltagsdenkens), aber auch Bezüge zur „Weltorientierung“ (z. B.: Modellbilden, Mathematik als Erkenntnis- und Konstruktionsmittel) sowie Bezüge zur „Stiftung kultureller Kohärenz“ (z. B.: Universalität mathematischer Aussagen, Denk- und Arbeitsweisen der Mathematik) auf der Hand [Schn, S. 182f.].

Wenn wir nun die Möglichkeiten und Stärken eines CAS hinsichtlich des Wechsels zwischen den verschiedenen Darstellungsformen genau diskutieren wollen, fällt zunächst auf, dass Schneider mit dem obigen Beispiel eines gewählt hat, das zweifelsohne die unterschiedlichen Darstellungsformen und ihre Beziehung zueinander grundsätzlich sehr deutlich expliziert, aber völlig ohne CAS-Referenzen dasteht. Auch in ihren späteren Ausführungen zur detaillierten Beschreibung der CAS-Darstellungen verweist sie nie auf das obige Beispiel. Aber wäre es nicht adäquat, die Stärke des CAS und damit die zuvor propagierte Stärke des Wechsels der Darstellungsformen gerade anhand eines passenden Beispiels zu zeigen? Entsteht aufgrund des Fehlens jeder CAS-Einbindung nicht eventuell der Eindruck, dass Schulbücher den Wechsel der Darstellungsformen ebenso gut illustrieren? Und läge somit die Besonderheit eines CAS nur in der raschen und flexiblen Verfügbarkeit verschiedener Darstellungen?

Dass dem durchaus nicht so ist und das CAS darüber hinaus noch Essenzielles zu leisten im Stande ist, soll im Folgenden gezeigt werden. Dazu illustriere ich das obige Beispiel anhand verschiedener CAS – und stoße gleich beim ersten Lösungsschritt der Aufgabe auf ein bemerkenswertes Problem.

Der erste Lösungsschritt sieht vor, dass die Schülerinnen und Schüler erst einmal an einigen aus der Angabe gewählten Werten (Stunden) den Weg ermitteln, den der Radrennfahrer in dieser Zeit zurücklegt. Meist notieren Schülerinnen und Schüler, die den Funktionsterm oder die Funktionsgleichung nicht sofort „sehen", einige Werte in der Form, wie es das Schulbuch vorschlägt[13]. Also etwa in der Gestalt:

$s(1) = 36 \cdot 1 = 36$

$s(2) = 36 \cdot 2 = 72$

$s(2{,}5) = 36 \cdot 2{,}5 = 90$

Manche Schülerinnen und Schüler erkennen aufgrund dieser ersten Berechnungen dann sehr rasch, dass diese funktionale Abhängigkeit mittels $s(t) = 36t$ beschrieben werden kann. Andere wiederum müssen noch einige zusätzliche Wertepaare aufschreiben und den Gedankenschritt „pro Stunde um 36 km mehr" wiederholen. Erst mit der Erkenntnis bzw. Darstellung $s(t) = 36t$ können CAS sinnvoll eingesetzt werden. Für einfache Aufgaben mit „eindeutiger" Modellierung gelangen wir daher zu folgendem Fazit:

(1) Zum soeben skizzierten Modellbildungsprozess kann das CAS anfangs nichts beitragen! Genauer gesagt, muss der Einstieg in den Modellierungsprozess als kognitive Leistung von den Schülerinnen und Schülern vor dem Einsatz des CAS erbracht werden. Dabei sind Grundkenntnisse in der Termdarstellung und -manipulation unverzichtbar. Erst im Anschluss an diese kognitive Leistung der Schülerinnen und Schüler kann der Computer als Werkzeug verwendet werden und zum weiteren Lernprozess beitragen.

(2) In komplizierteren Anwendungssituationen, wo die Modellierung nur verschieden gute Annäherungen an das „wirkliche Problem" liefern können, gilt eingeschränkt:
Ein erstes Modell müsste natürlich CAS-unabhängig erstellt werden, für die Untersuchung der Güte dieses Modells und für seine Weiterentwicklung würde ein CAS sicherlich wertvolle Dienste leisten.

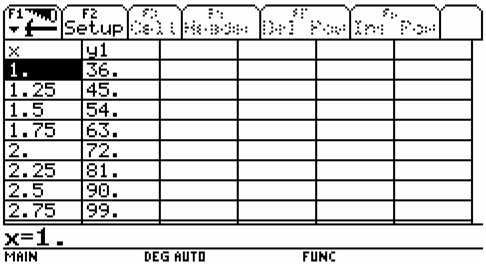
[13] Zweifelsohne werden aber auch einige Schülerinnen und Schüler auf diese Schreibweise verzichten.

Wesentlich ausführlicher, als das in der hier vorliegenden Arbeit der Fall sein kann, beschäftigt sich Hans-Stefan Siller in seiner Dissertation „Modellbilden – eine zentrale Leitidee der Mathematik“ mit unterschiedlichen Arten der Modellbildung. Bei zwei von vier in seiner Dissertation beschriebenen Arten des Modellbildens erwähnt Siller ausdrücklich den Einsatz von CAS [Sil, S. 18 ff.]. Das erste Mal tritt ein CAS im dritten Schritt „*Problemlösen – Erarbeiten einer mathematischen Lösung*“ des Modellbildungsprozesses[14] nach Tietze, Klika, Wolpers auf, dabei werden die bereits erlernten Verfahren zur Lösung des mathematischen Modells angewandt. An dieser Stelle kann ein CAS gute Dienste leisten, wenn die geforderten Verfahren und Anwendungen darin enthalten sind [Sil, S. 19]. Beim Modellbildungsprozess[15] nach Weigand, Weller kann der Computer bereits im zweiten Schritt „*Simulieren / Abstrahieren*“ als Hilfsmittel zur Datenerfassung und Visualisierung eingesetzt werden [Sil, S. 22]. Beim Vergleich der verschiedenen Methoden des Modellbildens im Mathematikunterricht stellt Siller fest, dass die Kernaussage aller vier Modelle im Wesentlichen die gleiche ist, sich bei genauerer Betrachtung jedoch erhebliche Unterschiede ergeben [Sil, S. 25]. Beim Modellbilden nach Tietze, Klika, Wolpers müssen die Schüler/innen die Grundlagen und Rechentechniken bereits „ausgiebig beherrschen“ und auch schon im Umgang mit CAS geschult sein, bevor sie in der Lage sind an ein entsprechendes Problem heranzugehen. Beim Modellbildungsprozess nach Weigand und Weller kann das CAS bzw. der Computer schon vor der „mathematischen Phase“ verwendet werden [Sil, S. 26f.]. Nach Siller hat jedes dieser Modelle seine Berechtigung [Sil, S. 25].

Kehren wir nun aber wieder zum Beispiel des Radrennfahrers zurück und betrachten wir den nächsten Schritt der Aufgabenlösung, nämlich das Erstellen einer Tabelle. Bei derzeit gängigen TI-CAS-Rechnern wie beispielsweise Voyage™ 200 oder der PC-Software Derive™ sollte zum einfachen Erstellen von Tabellen bereits der Funktionsterm[16] bekannt sein und mit dem Startwert sowie einer fixen (leider nicht variablen) Schrittweite eingegeben werden, dann generiert das CAS wieder auf Knopfdruck eine Tabelle.

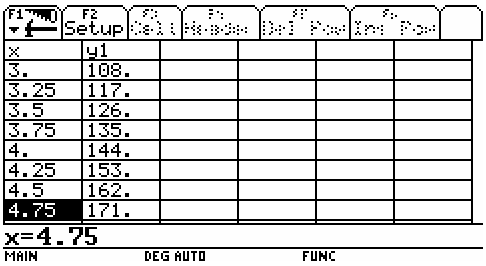
[14] 1. Schritt: Idealisieren – Schaffen von Realmodellen, 2. Schritt: Mathematisieren des Realmodells – Mathematisches Modellbilden, 4. Schritt: Interpretation – Validieren des Modells, 5. Schritt: Veränderung bzw. Verbesserung des Modells
[15] 1. Schritt: Spielen / analysieren / Entdecken, 2. Schritt: Simulieren / Abstrahieren, 3. Schritt: Mathematisieren, 4. Schritt: Experimentieren / „gezieltes Spielen“, 5. Schritt: Interpretieren, 6. Schritt: Erklären / Dokumentieren
[16] Einige CAS erlauben auch die direkte Eingabe von Tabellenwerten.

Das Ergebnis mit Voyage™ 200:



x	y1
1.	36.
1.25	45.
1.5	54.
1.75	63.
2.	72.
2.25	81.
2.5	90.
2.75	99.

x=1.



x	y1
3.	108.
3.25	117.
3.5	126.
3.75	135.
4.	144.
4.25	153.
4.5	162.
4.75	171.

x=4.75

Das Ergebnis mit Derive™:

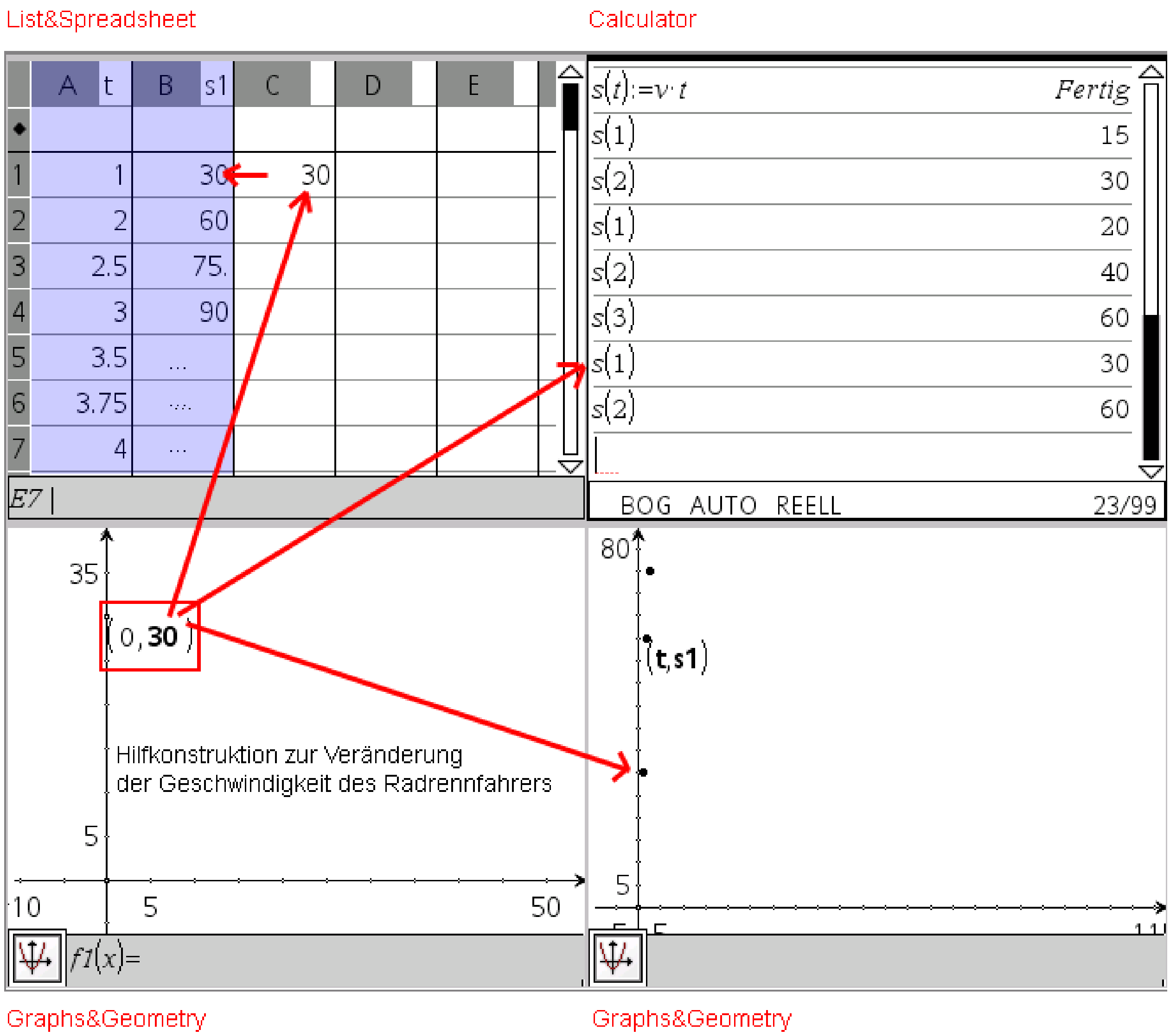
$$\begin{bmatrix} 1 & 36 \\ 1.25 & 45 \\ 1.5 & 54 \\ 1.75 & 63 \\ 2 & 72 \\ 2.25 & 81 \\ 2.5 & 90 \\ 2.75 & 99 \end{bmatrix}$$

Mit dem CAS können nun ausgehend von der Tabelle wieder „auf Knopfdruck“ grafische Darstellungen erzeugt werden, wobei sowohl der Voyage™ 200 als auch Derive™ eine Darstellung der Wertepaare und eine Darstellung als verbundene Linie (mit und ohne Punkte) erlauben.

Ein weiteres Mal ist somit die rasche (allerdings vorläufig auch nur diese) Verfügbarkeit unterschiedlicher Darstellungsformen gezeigt.

Weitaus interessanter als die rasche Verfügbarkeit der Darstellungsformen allein erscheint die von vielen zitierte Möglichkeit, die verschiedenen Darstellungen nebeneinander (und gleichzeitig) in verschiedenen Fenstern sichtbar zu machen. Erst dies macht es möglich, die Beziehung zwischen den Darstellungsformen zu thematisieren und erst jetzt kann aufgrund der Parallelität der Darstellungsformen untersucht und beobachtet werden, wie sich Veränderungen am Modell auf die Funktionsgleichung, die Tabelle und den Graphen auswirken. Darin sehe ich das oben in Aussicht gestellte ganz wesentliche Potenzial von CAS für die didaktische Nutzung des Spannungsverhältnisses zwischen den verschiedenen Darstellungsformen und in weiterer Konsequenz, zum Erreichen von Unterrichtszielen, die Allgemeinbildungsrelevanz besitzen. Die zuvor gestellte Frage „Und läge somit die Besonderheit eines CAS nur in der raschen und flexiblen Verfügbarkeit verschiedener Darstellungen?“ ist also mit „Nein, CAS können tatsächlich mehr!“ zu beantworten.

Womöglich vermag das neue CAS Produkt TI-Nspire™ hinsichtlich der unterschiedlichen Darstellungsformen, des Wechsels zwischen ihnen, aber auch der Beziehung zwischen ihnen noch mehr zu leisten als bisher gängige CAS Produkte. Eine mir zur Verfügung stehende, aber noch nicht endgültig ausgereifte Testversion (Juli 2006) zeigt, dass in diesem neuen Produkt die verschiedensten Darstellungsformen miteinander verbunden (verlinkt) werden können.



So kann beispielsweise, wie das eingefrorene Bild zeigt, ein „Schieberegler“ (links unten) erstellt und eine Tabelle unter Berücksichtigung der mit dem Schieberegler ausgewählten Werte erzeugt werden. Wird nun die Position des Schiebereglers, die etwa für die Geschwindigkeit des Radrennfahrers steht, verändert, so ändern sich auch die mit dem „Schieberegler“ verlinkten Werte der Tabelle, sowie die im rechten Graphs&Geometry-Fenster dargestellten Zahlenpaare. Auch der „Calculator“ übernimmt

die neuen Werte aus dem Schieberegler, die Änderung wird aber nicht automatisch am Funktionsterm sichtbar.
Das Verlinken bzw. Verbinden der unterschiedlichen Darstellungsformen bei TI-Nspire™ CAS wird möglicherweise neue Wege eröffnen, wenn es im Unterricht darum geht, den Wechsel zwischen den Darstellungsformen und Veränderungen bei den parallel verfügbaren Darstellungsformen zu studieren. Karl Fuchs hat schon 1998 betont, dass Computeralgebrasysteme eine komfortable Möglichkeit bieten, numerische, grafische und symbolische Darstellungen parallel für Argumentationen zu verwenden [Fu1, S. 14]. Möglicherweise kann auch hier die neue Software von TI interessante Beiträge leisten. Eine weitere Analyse der Stärken und Schwächen dieser neuen Software, sowie ihrer Einsatzmöglichkeiten im Unterricht kann hier im Rahmen dieser Arbeit nicht erfolgen und wird erst mit einer stabil laufenden Endversion sinnvoll sein.

Zum Abschluss sei noch erwähnt, dass E. Schneider meint, die symbolische Darstellung sei die zentrale Darstellungsform aller CAS, wobei arithmetische, algebraische und rekursive Darstellungen unterstützt werden [Schn, S. 191]. Ferner können mit CAS symbolische Darstellungen durch Befehle wie „**Approximate**“[17], „**Factor**“[18], „**Expand**“[19], „**comDenom**“[20] und „**propFrac**“[21] leicht verändert werden [Schn, S. 192]. Auf die von Hischer geäußerten kritischen Anmerkungen zu CAS und insbesondere zu den soeben genannten Befehlen werde ich später noch eingehen.

5.2.2 Die Window-Shuttle-Technik

Die schon zuvor erwähnte Technik, verschiedene Fenster und Darstellungsformen parallel zu verwenden, wird auch als Window-Shuttle-Technik bezeichnet. Heugl/Klinger/Lechner sehen in der „Window-Shuttle-Technik“ eine Arbeitsweise, die wesentlich zur qualitativen Veränderung von Kognition beitragen kann [Heu, S. 200].

> Das „*Arbeiten mit der Window-Shuttle-Technik bedeutet also, dass sich ein Be griff, eine Problemlösung durch mehrmaliges Hin- und Herpendeln („Shutteln“)*

17 „numerische“ („näherungsweise“) Berechnung
18 Faktorisierung eines Terms oder einer Zahl
19 Ausmultiplizieren
20 Führt zur Berechnung eines gemeinsamen Nenners und zur Darstellung des Terms als gekürzter Bruch
21 Führt zur Wiedergabe eines Terms als echter Bruch

zwischen den verschiedenen Darstellungsformen, das heißt zwischen den verschiedenen Fenstern des CAS, entwickelt“ [Heu, S. 200].

Dabei stützen sie ihre Argumentation vorwiegend auf W. Dörflers Arbeit „*Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium*“. Die ganz allgemeine These, dass Kognition ein funktionales System ist, das den Menschen, das Werkzeug und den sonstigen materiellen und sozialen Kontext umfasst, sehen Heugl et al. insbesondere durch jene Klassen bestätigt, in denen das CAS stets zur Verfügung stand. Sie stimmen zudem mit W. Dörfler überein, dass der Computer als Werkzeug nicht nur ein „Verstärker“ [Dör, S. 52] menschlicher Leistungen ist, sondern auch als kognitives Werkzeug und Medium betrachtet werden muss. Auch die Tatsache, dass „Denkprozesse oft vorteilhaft anhand gegenständlicher Vorstellungen, Repräsentationen, Modellierungen der jeweiligen Problemsituation erfolgen“ [Dör, S. 57] und die Theorie, dass der Computer ein geeignetes Medium für Prototypen ist, scheinen für die Window-Shuttle-Technik zu sprechen. Die Theorie der Prototypen geht unter anderem der Frage nach, wie Allgemeinbegriffe in der menschlichen Kognition repräsentiert sind [Dör, S. 65] und wird von W. Dörfler als besonders relevant für das mathematische Denken erachtet, da davon ausgegangen werden kann, dass mathematische Begriffe Allgemeinbegriffe mit einer unbestimmten Referenzmenge von Objekten sind. Im Allgemeinen wird nicht abstrakt, sondern eher direkt an materiellen prototypischen Repräsentanten operiert [Dör, S. 66]. Die für einen Prototypen konstitutiven Eigenschaften werden eher implizit verwendet und selten verbalisiert. Nach W. Dörfler steuert der Prototyp mit seinen verfügbaren Eigenschaften den kognitiven Prozess [Dör, S. 66] und die von den Lernenden gebildeten Prototypen bestimmen deren Verhalten im sozialen Diskurs hinsichtlich der Art und Weise, Äußerungen der anderen (Lernenden bzw. Lehrenden) zu verstehen und zu interpretieren, aber auch bezüglich der Form und Beschaffenheit der eigenen Ausführungen [Dör, S. 66].

Am Beispiel des Funktionsbegriffs zeigen Heugl/Klinger/Lechner den möglichen Ablauf eines Lernprozesses nach der Window-Shuttle-Technik, wobei sie davon ausgehen, dass eine abstrakte Definition den Schülern und Schülerin kaum einen Zugang zum Funktionsbegriff gewähren wird. Vielmehr scheinen geeignete Prototypen die Aufmerksamkeit auf die wesentlichen Eigenschaften des Begriffs zu lenken [Heu, S. 199]. Der Lernprozess und die Funktion des CAS bei diesem Prozess wird in folgende Schritte gegliedert [Heu, S. 199 f.]:

1. Die Lernenden aktivieren im Algebra- und Grafikfenster des CAS verschiedene Prototypen des jeweiligen Begriffs oder Problems.
2. Für die nun folgende Bearbeitung der einzelnen Prototypen werden die Vorzüge des CAS (Interaktivität, leichte Manipulierbarkeit, Wiederholbarkeit) genutzt.
3. Die Mehrfenstertechnik erlaubt das simultane Arbeiten mit verschiedenen Prototypen. Die Auswirkungen der algebraischen Operationen können sofort im Grafikfenster untersucht werden und Untersuchungen des Graphen liefern möglicherweise Ideen für neue Aktivitäten im Algebrafenster.

Leider bricht die Beschreibung des Lernprozesses, der meiner Meinung nach hier noch nicht abgeschlossen sein kann, nach dem dritten Schritt ab. Ein vierter Schritt, indem die Beobachtungen schriftlich festgehalten und in Partner- oder Gruppenarbeit bzw. im Klassenverband diskutiert und reflektiert werden, sollte den vorhergehenden Lernprozess abschließen, nicht ohne dass die Reflexionen von allen schriftlich festgehalten werden.

Markus Hohenwarter sieht in GeoGebra und der dadurch möglichen „*bidirektionalen Koppelung*“ [Hoh, S. 25] von ikonischer und symbolischer Darstellung eine Weiterentwicklung der Window-Shuttle-Technik. Die von Hohenwarter verwendeten Begriffe „enaktiv – ikonisch – symbolisch“ wurden von J. Bruner geprägt . Wissen lässt sich demnach auf drei verschiedene Arten darstellen bzw. erschließen. *Enaktiv* meint die Wissensdarstellung bzw. -erschließung mittels Handlung, *ikonisch* jene mittels Bildern und *symbolisch* jene durch Zeichen und Sprache [Wittm, S. 87].

5.2.3 Die Black Box und die White Box

Ein ebenfalls sehr häufig in Verbindung mit CAS auftretender Begriff ist jener der „Black Box“ bzw. „White Box“. Dieser Begriff wurde 1990 erstmals von Bruno Buchberger formuliert, ihm kommt aber erst durch den Einsatz von Computern im Unterricht besondere Bedeutung zu [Heu, S. 159]. Die White Box-Phase entspricht einer Phase des verstehenden Lernens, in der die Schülerinnen und Schüler die entwickelten Operationen ohne Verwendung des Computers erlernen [Heu, S. 159], ihr folgt die Black Box-Phase, die durch erkennendes und begründendes Anwenden gekennzeichnet ist. Dabei werden die in der White Box-Phase entwickelten Algorithmen und Konzepte dem Computer als Black Box überlassen [Heu, S. 160].

Heugl/Klinger/Lechner schlagen als viel versprechendes Unterrichtsprinzip das „*Black Box/White Box-Prinzip*“ vor [Heu, S. 176]. Demgemäß erforschen Schüler und Schülerinnen unterstützt vom CAS als Black Box unbekannte Bereiche der Mathematik. Durch experimentelles, aktives Lernen stellen die Schülerinnen und Schüler Vermutungen auf, die hinterher in der White Box-Phase abgesichert und begründet werden [Heu, S. 176]. Eine daran anschließende Übungsphase soll die White Box stabilisieren, in einer späteren Phase werden die Inhalte dann wieder als Black Box genutzt [Heu, S. 178].

5.2.4 CAS-Module

Auch das Modulprinzip bzw. die Modularität sind Begriffe, die im Zusammenhang mit CAS stehen. Auffällige viele Arbeiten zum CAS-Einsatz sowie zur Verwendung von Modulen berufen sich auf W. Dörflers Arbeit „Der Computer als kognitives Werkzeug und Medium“, der in einem Abschnitt „Modularität des Denkens“ die wichtigsten Voraussetzungen für das Modulprinzip zusammenfasst [Dör, S. 71]. Kognitionspsychologische Forschungen ergaben, dass die kognitiven Leistungen von Experten/Expertinnen einerseits darauf beruhen, dass „*sich ihr Denken durch die Verfügbarkeit eines hochgradig strukturierten Wissens (große Breite) auszeichnet*“ [Dör, S. 71], andererseits verfügen Experten/Expertinnen über „*große Wissenseinheiten*“ – so genannte „chunks“ – die global, direkt zugänglich und operativ einsetzbar sind. So denkt beispielsweise der Schachmeister in gesamten Stellungen und der/die Programmierer/in hat große Programmteile als Prozeduren funktional verfügbar [Dör, S. 71]. Ähnliches gilt nach Dörfler auch für den „erwachsenen“ Mathematiker bzw. die „erwachsene“ Mathematikerin. Er/sie hat gewisse Wissensblöcke als Muster oder Vorlagen (templates) in seinem/ihren Denken zur Verfügung, weiß über deren Einsatz- und Verwendungsmöglichkeiten Bescheid und kann sie flexibel in Problemlöseprozessen einsetzen [Dör, S. 71].

In einem Modul wird komplexes Wissen komprimiert und Operationen werden verkürzt, dadurch ist ein Modul als Ganzes abruf- und einsetzbar und muss nicht mehr explizit entfaltet werden. Eine solche „Einkapselung“ ist nur möglich, wenn zuvor eine intensive Beschäftigung mit den jeweiligen Wissensinhalten erfolgte [Dör, S. 72].

Es ist nahe liegend, Computer als Speicher von Modulen zu verwenden. Nach Dörfler ist im Allgemeinen die Kenntnis des internen Aufbaus eines solchen Moduls nicht erforderlich [Dör, S. 72], er hält es sogar für produktiver, sich auf Module zu verlassen und sie im Sinne einer Black Box zu verwenden [Dör, S. 73]. Für die Schulmathematik empfiehlt er die softwaremäßige Implementierung verschiedenster Module (z. B.: Gleichungslösen, verschiedene geometrische Konstruktionen, Bestimmen von Ableitungen und Stammfunktionen, …), betont aber, dass ein konzeptuelles und operatives Verständnis der entsprechenden Prozesse und Operationen weiterhin bedeutend ist, die Ausführung jedoch dem Computer überlassen werden kann [Dör, S. 73]. Außerdem ist er davon überzeugt, dass intensiver Gebrauch eines Moduls „intime“ Kenntnis über dessen Funktionalität ergeben kann und es anschließend bei komplexen Aufgabenstellungen angewandt werden kann [Dör, S. 73]. Zu guter Letzt meint Dörfler und da stimme ich ihm ganz zu, dass die Verfügbarkeit von Modulen am Computer im Bereich der Schulmathematik eine Reorganisation der mathematischen Tätigkeiten erfordert.

Heugl/Klinger/Lechner verstehen unter Modularität die Anwendung des Baukasten-Prinzips bei Problemlöseprozessen und sehen grundlegende Quellen schon bei Rene Descartes und Euklid. Weiters stimmen auch sie mit den oben ausgeführten Theorien W. Dörflers überein und sind überzeugt, dass Module sogar kognitive Entlastungsfunktionen haben [Heu, S. 181]. Ihre Vorstellung zur Reorganisation der mathematischen Tätigkeiten sieht folgende drei Schritte vor:

1. ***Verstehen, Strukturieren, Aufspüren von Wissenseinheiten***
   Ausgehend vom Verstehen eines mathematischen Teilgebiets werden Wissenseinheiten aufgespürt und zueinander in eine (hierarchische) Ordnung gebracht [Heu, S. 181].

2. ***Implementieren, Testen und Dokumentieren***
   Mittels CAS ist es nun möglich, eine bisher nur statische Zusammenfassung des erworbenen Wissens, durch eine Implementierung in CAS interaktiv nutzbar zu machen. Bei der Implementation steht der innere Aufbau der Module im Vordergrund, beim Testen und Dokumentieren sind jedoch bereits das Wissen um die Funktionalität, die Anwendbarkeit sowie die Bedingungen der Anwendung bedeutend [Heu, S. 182].

3. ***Problemlösen mit Hilfe von Modulen***

   Erst in diesem Schritt – durch die Verwendung der Module – erfolgt für die Autoren die eigentliche Reorganisation der mathematischen Tätigkeit. Kalküle, die nun als Ganzes zur Verfügung stehen, können als solches auch in den Problemlöseprozess eingebaut werden und erleichtern das Denken und Arbeiten in der Problemlöseebene. Damit erlangen Tätigkeiten wie das Planen, Reflektieren und Anwenden von Strategien größere Bedeutung und verdrängen die Tätigkeit des Ausführens [Heu, S. 182].

Die Implementierung von Modulen kann nach Ansicht der Autoren von drei Seiten erfolgen. Erstens können Module von Schülerinnen und Schülern – eventuell auch als Gruppenarbeit – selbst erstellt werden[22], zweitens können Module von den Lehrenden zur Verfügung gestellt werden und drittens werden Module auch vom Systementwickler zur Verfügung gestellt [Heu, S. 183 ff.]. Dabei weisen die Autoren daraufhin, dass durchaus Vorsicht beim Arbeiten mit Modulen geboten ist, da die Gefahr besteht, dass Module unverstanden übernommen werden und nach einiger Zeit nicht mehr richtig eingesetzt werden [Heu, S. 187].

Klaus Aspetsberger [Asp, S. 77] und K. J. Fuchs [Fu1, S. 57f.] weisen noch deutlicher als die zuvor genannten Autoren auf die Gefahren und Vorteile des Modulkonzepts hin. Die *Gefahren* bestehen vor allem darin, dass leistungsschwache Schüler/innen Module „blind“ verwenden, ohne deren Wirkungsweise zu verstehen und zu hinterfragen. Dadurch wird Unverstandenes noch mehr verschleiert [Fu1, S. 58]. Ferner wird die Fehlersuche bei unerwünschten Ergebnissen für die Schüler/innen noch schwerer, wenn die Funktionsweise der verwendeten Module nicht nachvollzogen werden kann. Die *Vorteile* des Modulkonzepts sehen die beiden zum einen darin, dass gute Schülerinnen und Schüler motiviert sind, „*sich durch das Definieren von Funktionen ein eigenes System zu schaffen*“, zum anderen ist das Schreiben von Funktionen eine Art des „*konstruktiven Exaktifizierens und bildet den Abschluß einer intensiven Erarbeitungsphase*.“ [Fu1, S. 57].

Edith Schneider geht in ihrer Habilitationsschrift [Schn, S. 259 ff.] weit über die von Dörfler publizierten Ansätze hinaus und versucht auch für Module einen didaktischen

[22] Dörfler hingegen meint, diese Aufgabe würde „das einzelne Subjekt“ [ohne nähere Präzisierung Dörflers] überfordern.

Orientierungsrahmen zu finden. In ihren Ausführungen zitiert sie unter anderem Peschek, Maaß, Schlöglmann und Fischer und kommt zu dem Schluss, dass die Modularisierung von Wissen die Trennung von Anwendung und Entwicklung, also von Tun und Verstehen (des inneren Aufbaus) ermöglicht [Schn, S. 261]. Weiters führt sie aus, dass die Trennung zwischen Verstehen und Tun eine breite Anwendung und sinnvolle Arbeitsteilung ermöglicht und somit unserer hochgradig differenzierten und arbeitsteiligen Gesellschaft entspricht [Schn, S. 261 f.]. Ferner ist sie überzeugt, dass auch aus bildungstheoretischer Sicht ein Streben nach lückenlosem Wissen unrealistisch und nicht allgemein bildend ist [Schn, S. 262]. Viel eher ist eine emanzipierte Beziehung des Menschen zum Wissen und Nichtwissen anzustreben sowie ein verständiger Umgang mit ausgelagertem Wissen und Metawissen darüber – wie beispielsweise Black Boxes funktionieren – anzustreben [Schn, S. 262 f.].

Die vielen von CAS angebotenen (Standard-)Module unterscheidet E. Schneider hinsichtlich ihrer Funktionalität. Zum einen gibt es Module, durch die mathematische Objekte gespeichert werden, zum anderen solche, durch die mathematische Operationen ausgeführt werden [Schn, S. 265 ff.]. Module können natürlich auch verknüpft und ineinander verschachtelt werden, vor allem dann, wen man versucht zu einer möglichst geschlossenen Formel zu kommen [Schn, S. 270 ff.].

Auch Edith Schneider sieht ähnlich wie Heugl den Schwerpunkt eines CAS-unterstützen Mathematikunterrichts nicht mehr im Ausführen aufwändiger operativer Tätigkeiten, sondern – und da unterscheidet sich ihre Orientierung ein wenig von der Heugls – im Erwerb eines Grundwissen und dessen Reflexion [Schn, S. 272 f.]. Denn CAS-Module, als gebündeltes mathematisches Wissen und Können, entsprechen ihrer Ansicht nach einem Expert/inn/enwissen und stehen bei geeigneter Kommunikation zwischen Mensch und Maschine dem Benutzer bzw. der Benutzerin zur Verfügung, entbinden diese aber nicht von einem umfassenden, tiefgehenden Verständnis der Wirkung und Anwendungsmöglichkeit der Module, daher ist der Mathematikunterricht auf derartiges Grundwissen und dessen Reflexion auszurichten [Schn, S. 272 f.].

5.2.5 Kritische Bewertung des Einsatzes von CAS

Neben all den bisher referierten, motivierten und engagierten Überlegungen zum Einsatz von CAS im Unterricht, sei aber nicht auf kritische Anmerkungen vergessen, die sich vor allem in folgenden Aspekten manifestieren:

1. Schwierigkeiten beim Umgang mit CAS
2. Inadäquater Einsatz von CAS
3. Fehler bzw. Fehlermeldungen im CAS

Ad 1. Schwierigkeiten beim Umgang mit CAS

Die Schwierigkeiten beim Umgang mit CAS werden von Schülerinnen und Schülern sowie von Lehrerinnen und Lehrern immer wieder thematisiert. Karl Fuchs wies in seiner Habilitationsschrift bereits auf die Ein- und Ausgabe-Problematik von Computeralgebrasystemen hin, zeigte aber auch auf, wie diese für den Unterricht genutzt werden könnten [Fu1, S. 26 ff.].

In H.G. Weigands Bericht über die Untersuchung zum Einsatz von Taschencomputern in der 10. Jahrgangsstufe kann nachgelesen werden, dass Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten beim Umgang mit dem Voyage 200 hatten [Wei, S. 100], obwohl vier der sieben Versuchsklassen des naturwissenschaftlichen Zweigs wöchentlich eine zusätzliche Stunde im Rahmen des „Wahlpflichtgebiets Informatik“ zur Verfügung stand und diese vorwiegend zur Behandlung mathematischer Themen mit Hilfe der Programmiersprache des Taschencomputers verwendet wurde [Wei, S. 93 ff.]. Ähnliche Ergebnisse sind auch in der von mir durchgeführten Evaluation aufgetreten (siehe Abschnitt 7.2.3).

Weiters ist auch bei Weigand nachzulesen, dass von vielen explizit der komplizierte Aufbau, die Bedienung und die Schwierigkeit beim Auffinden der richtigen Befehle bzw. Tastenkombinationen als Barriere genannt werden. Die optimistische Hoffnung der Pioniere, dass die Bedienung der Rechner bald so einfach werde, dass sie weitgehend intuitiv und aus mathematischen Handlungen leicht ableitbar sei, hat sich bis heute nicht erfüllt. Leider ist der Rechner noch immer kein Werkzeug bzw. Instrument, das aus sich selbst heraus verständlich ist [Wei, S. 105]. Es scheint so, als ob für die Verwendung eines CAS immer etwas (Befehle, Bedienung, …) gelernt werden müsste. Zu überlegen wäre, wie weit sich dies reduzieren ließe und ob es denn nicht möglich und denkbar wäre, das Wissen, das Schülerinnen und Schüler zweifelsohne von ihrer alltäglichen Verwendung des Computers mitbringen, für die Verwendung eines CAS zu nützen. So ist einmal mehr bei Weigands Untersuchungsergebnissen ersichtlich, dass die Bedienung zusätzlich zur Mathematik eigens gelernt werden muss. Schülerinnen und Schüler wünschen sich sogar zusätzliche Stunden, um jeweilige Befehle für einzelne Themengebiete zu üben [Wei, S. 100]. Möglicherweise tragen solche Schwierigkeiten beim Umgang mit CAS und die rasche Weiterentwicklung der Produkte zur bereits erwähnten mangelnden Vertrautheit der Lehrenden mit den unterschiedlichen Geräten bei.

Ad 2. Inadäquater Einsatz von CAS

Horst Hischer unterscheidet in Analogie zu Walter Oberschelps[23] Gedanken [Obe] zwei grundsätzliche Betriebsarten eines CAS. Zum einen den „Numerisch-Graphischen Modus“ (NG), zum anderen den „Symbolischen Term-Modus“ (ST) [Hi2, S. 262]. Das eigentlich Neue nach Hischer sei der ST-Modus, denn der NG-Modus biete nicht mehr Optionen als ein herkömmlicher Taschenrechner und Funktionsplotter und für das Arbeiten im NG-Modus benötigt man nach Hischer eigentlich gar kein Computeralgebrasystem [Hi2, S. 263]!

Um zu verdeutlichen, wann ein CAS im ST-Modus arbeitet, muss ein Blick auf die von CAS verarbeiteten Objekte geworfen werden: Diese sind dann „*mathematische Terme*, die als Bestandteilen von Formeln (Gleichungen, Ungleichungen) auftreten“ [Hi2, S. 262]. Hischer führt weiters aus:

> Terme lassen sich in beliebigen algebraischen Strukturen rekursiv definieren, etwa in ($\mathbb{R}$, +, $\cdot$):
>
> (i) Jedes Zahlzeichen für eine reelle Zahl ist ein Term.
>
> (ii) Jede Variable ist ein Term.
>
> (iii) Sind T_1 und T_2 Terme, so auch $T_1 + T_2$, $T_1 - T_2$, $T_1 \cdot T_2$, $T_1 \div T_2$.
>
> (iv) Ist T ein Term, so auch (T).

[23] Bemerkenswert erscheint mir, dass Oberschelp in seinem Beitrag zur 13. Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematik und Informatik“ im Jahre 1995 – der Grundlage des hier erwähnten Artikels ist – mit der damals bei manchen Benutzern bzw. Benutzerinnen von CA-Systemen vorherrschenden Meinung, CA-Systeme seien als typische Werkzeuge der Künstlichen Intelligenz anzusehen, aufräumen wollte/musste. Nach Oberschelp verzichten CA-Syteme auf die Weiterentwicklung unserer Intelligenz; sie versuchen bloß unser gesamtes Wissen und Können zu compilieren [Obe, S. 32].

(v) Und es könnte dann z. B. hinzukommen: Ist $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}^M$, und ist *T* ein Term, so auch *f(T)* [Hi2, S. 262].

Nach Oberschelp [Obe, S. 31 ff.], dessen Ausführungen wie schon oben erwähnt Grundlage für Hischers Schlussfolgerungen sind, treten Terme in den folgenden fünf Formen auf:

(1) Kanonische Zeichen für Zahlen (Integer, Festkomma, Gleitkomma)

(2) Zahlenpaare, Zahlen-Tripel, in der Ausgabe üblicherweise dargestellt als Punkte der (x,y)-Ebene oder des perspektivisch dargestellten (x,y,z)-Raumes, z. B. bei Funktionsgraphen, Kurven oder Flächen und bei Scharen solcher Objekte.

(3) Zur Bildung komplexer Terme dienen Funktionszeichen wie z. B. +, -, $\cdot$, $\div$, $\sqrt{\ }$, ferner Bruchstriche, Exponentiation, Fakultät, oder ggT, kgV, Min, Max, sin, log, … und ihre Verkettungen (…) und es gibt auch Zeichen für nullstellige Funktionen, z. B. π, e, i. Diese dienen i.a. als Abkürzungssymbole für bestimmte Zahlen (sog. Konstante).

(4) Wichtige Erweiterungen des Termbegriffs erfolgen durch Verwendung von Variablen für Zahlen, Zahlenpaare, Vektoren, z. B. x, y, z, a, b, $\vec{x}$ usw.

(5) Eine letzte Erweiterung des Termbegriffs geschieht mittels Funktionsvariablen und durch Operatoren, z. B.:
f(x,y), g(h(x,y), f(2,z)),

$$\frac{d\,f(x)}{dx},\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\,\partial y},\ \int \sin(x)dx,$$

$$\int u(x)\cdot v(x)\,dx,\ \int_o^N e^{-x^2}dx,\ \left(FT(f)\right)(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\,dt$$

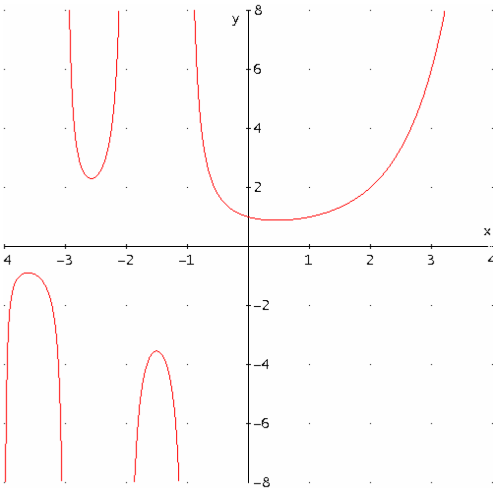
Nun, wenn ein CAS im NG-Modus genutzt wird, also Probleme gelöst werden, die eigentlich gar keines CAS bedürfen, so geschieht dies nach Hischer [Hi2, S. 263] meist mit den Typen (1) bis (3). Hierbei wird das CAS bloß wie ein programmierbarer Taschenrechner verwendet, der bei der Verwendung von (2) über ein Graphik-Display verfügt. Indizien dafür, dass ein CAS also im NG-Modus arbeitet, sind die Anwendung von Operationen und Optionen wie „**approx**“, das numerische Lösen von Gleichungen und das Darstellen von Funktionsgraphen mit einem integrierten Funktionsplotter.

Unter diesem Gesichtspunkt betrachtet scheinen also einige der von E. Schneider angeführten Belege hinsichtlich der These bzw. Feststellung, dass symbolische Darstellungsformen die bedeutendste Darstellungsform eines CAS sei, relativiert.

Ad 3. Fehler bzw. Fehlermeldungen im CAS

Auch hier möchte ich wiederum auf die neuesten Forschungsergebnisse von Weigand verweisen, die klar zeigen, dass Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten mit den unklaren Fehlermeldungen des Voyage 200 haben [Wei, S. 100].

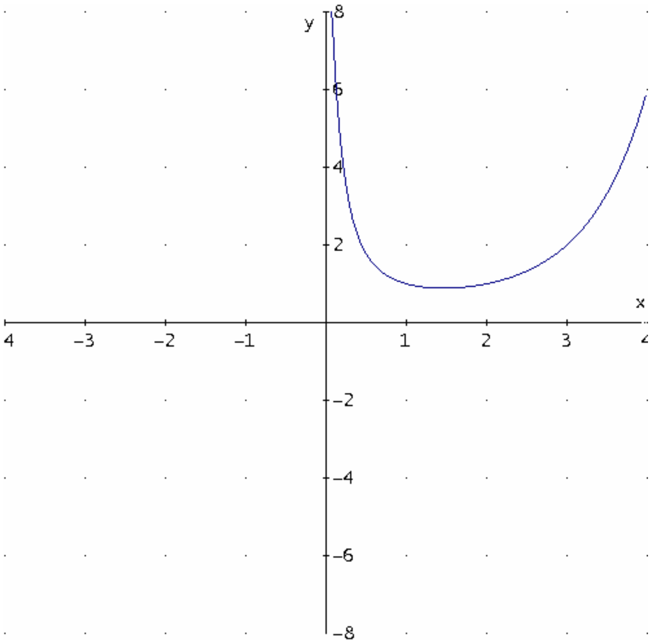
Des Weiteren führt Hischer an zahlreichen Beispielen [Hi2, S. 266 ff.] aus, dass diverse CAS verschiedenste Aufgabenstellungen nicht (brauchbar) lösen können, manchmal sogar einen falschen Output liefern und das ein CAS gelegentlich auch hoffnungslos überfordert sein kann [Hi2, S. 270]. Am Beispiel der Gammafunktion (die Verallgemeinerung der Fakultätsfunktion von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{R}^+$) zeigt Hischer, dass diese Funktion dem TI 92 und Derive zwar bekannt ist, jedoch nicht richtig [Hi2, S. 269]. Weiters kann Derive die Gammafunktion nicht mit dem Integral[24] identifizieren. Möchte man den Graphen von $x \mapsto x!$[25] zeichnen, so erhält man mit Derive folgenden Output:



[24] $x! := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$

[25] also $x \mapsto \Gamma(x-1)$

Erst beim Plotten von $x \mapsto \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$ erhält man den korrekten Graphen.



Das Grundproblem so Oberschelp [Obe, S. 33] der CAS besteht also im *Erkennen* der Aufgabe und im *Aufsuchen* und *Auswerten* der zugehörigen Theorien in der ans CAS angeschlossenen Daten- und Methodenbank.

CAS haben also oftmals Schwierigkeiten beim „Verstehen“ von Eingaben. Oberschelp spricht sogar von einer Diskrepanz zwischen „Eingabe-Sensibilität“ und „Ausgabe-Robustheit“, die von Laien oft nicht erkannt wird und zur Täuschung hinsichtlich der Leistungsfähigkeit der Systeme führt [Hi2, S. 270 f.]. Hischer räumt jedoch ein, dass einige der von Oberschelp im Jahre 1995 beschriebenen Probleme bereits behoben wurden, andere aber immer noch bestehen [Hi2, S. 278]. Ferner gibt er (Hischer) zu bedenken, dass neuere Versionen auf von ihm aufgezeigte Problemfälle möglicherweise anders „reagieren“, aber dennoch „immer irgend etwas“ nicht in Ordnung sein wird [Hi2, S. 269].

Zusammenfassend lässt sich also sagen, dass der Einsatz von CAS auch bei bestmöglichen didaktischen Überlegungen immer noch einige Hürden und Schwierigkeiten in sich birgt.

- Der Umgang mit dem CAS muss eigens erlernt werden und ist nebenher nicht möglich.
- Die Verwendung eines CAS muss über den Einsatz des Numerisch-Graphischen-Modus hinausgehen.
- Die dem CAS immanenten Fehler bzw. unklaren Fehlermeldungen sollten einerseits von den Herstellern reduziert werden, andererseits den Lehrenden bekannt sein, damit er oder sie gegebenenfalls entsprechend darauf reagieren kann.

5.3 Dynamische Geometriesysteme im Mathematikunterricht

Dynamische Geometriesysteme (DGS) entstanden Ende der 1980er als „rein didaktische Software" [Hi2, S. 278] und zeichnen sich heute eventuell dadurch in ihrer relativ leichten und intuitiven Handhabung aus. Grundlegende Ideen für eine derartige Software gehen auf die in der Industrie verfügbaren „dynamischen" CAD-Systeme zurück. Im Folgenden möchte ich einige Gedanken aus der schon weit zurückliegenden 14. Arbeitstagung „Mathematikunterricht und Informatik" (1996), die mir aber noch heute relevant und bedeutend erscheinen, aufgreifen, danach grundsätzliche Wesensmerkmale der DGS vorstellen und im Speziellen den Fokus auf GeoGebra lenken, da dies die im von mir evaluierten Projekt „Medienvielfalt im Mathematikunterricht" (siehe Kapitel 6) vorrangig verwendete Dynamische Geometriesoftware ist[26].

5.3.1 Computer und Geometrie

Im September 1996 – also vor etwas mehr als elf Jahren – fand die alljährliche Arbeitstagung des Arbeitskreises „Mathematikunterricht und Informatik" mit den Leitgedanken [Hi3, S. 5]:

---

[26] Eine prägnante Zusammen- und Gegenüberstellung derzeit gängiger DGS wurde von Matthias Hattermann und Rudolf Sträßer in **c't 2006** (Heft 13, S. 174 – 181) veröffentlicht.

- *Ändert sich womöglich unser Verständnis von „Geometrie“ durch die Verfügbarkeit von Computern? Muß es sich gar ändern?*
- *Welche Chancen, aber auch welche Probleme bietet uns der Computer(-Einsatz) für den Geometrieunterricht?*

statt.

Horst Hischer gab bereits damals (1996) zu bedenken, dass der Computer und die Informatik nicht mehr nur Auswirkungen auf den Mathematikunterricht haben, sondern beide mittlerweile Anlass geworden waren, über grundsätzliche Zielsetzungen des Mathematikunterrichts nachzudenken [Hi4, S. 8]. Auf der oben zitierten Herbsttagung standen fünf Aspekte bzw. Fragestellungen im Zentrum, die allerdings meinem Erachten nach auch heute noch nicht restlos geklärt sind.

Die erste Frage war die nach den Möglichkeiten des Computereinsatzes im Geometrieunterricht und den dabei zu beachtenden Gesichtspunkten [Hi4, S. 8]. Diese Frage zielte zum einen auf die Unterrichtsmethodik, zum anderen aber auch auf lernpsychologische Blickwinkel ab. Besonderes Augenmerk sollte darauf gerichtet werden, welche Bedeutung das Eindringen des Computers in die Schule für das Denken und Handeln – also in weiterer Folge auch das Verstehen – der Schülerinnen und Schüler bzw. der Lehrerinnen und Lehrer haben kann.

Die zweite Frage betraf eher den Unterrichtsgegenstand und sucht Antworten darauf, ob sich aufgrund der Verfügbarkeit informatischer Systeme womöglich unser Verständnis von und unsere Einsicht in „Geometrie“ ändert [Hi4, S. 9].

Die letzten drei Fragen bezogen respektive beziehen sich immer noch auf den Bildungswert des Geometrieunterrichts und seien hier ergänzend angeführt [Hi4, S. 9]:

- *Welche Ziele und Inhalte des bisherigen Geometrieunterrichts können möglicherweise nicht mehr aufrechterhalten werden?*
- *Welche Ziele und Inhalte bleiben dagegen unverzichtbar?*
- *Welche Ziele könnten oder sollten gar möglicherweise neu hinzukommen?*

Keine der hier zitierten Fragen konnte bis dato ausreichend und für eine große Mehrheit von Fachdidaktikerinnen bzw. Fachdidaktikern zufrieden stellend beantwortet werden[27]. Es wäre wohl ein reizvolles und ebenso ertragreiches Unterfangen, die fundamentalen Ideen und Grundvorstellungen in der Geometrie unter dem Blickwinkel der modernen Dynamischen Geometriesysteme zu betrachten. Daraus ergäben sich zwangsläufig Ziele und Inhalte, die unverzichtbar sind, aber auch solche, die es nicht mehr lohnt aufrechtzuerhalten und ebenso würden vermutlich neue Ziele hinzukommen[28]. Dass dies noch nicht geschehen ist, liegt wohl daran, dass das Problem tiefliegend ist und zuerst mehrheitlich noch immer der Frage nachgegangen werden muss, wie der Computer im Geometrieunterricht eingesetzt werden kann.

Abgesehen von diesen offenen Punkten sei noch erwähnt, dass die Frage, ob sich das Verständnis von Geometrie durch Einsatz des Computers verändert, auf der oben erwähnten Tagung von Gerhard Holland und Rudolf Sträßer ganz unterschiedlich beantwortet wurde. Holland meint, Dynamische Geometriesysteme wurden entwickelt, um traditionelle Inhalts- und Prozessziele des Geometrieunterrichts effektiver zu erreichen, ihr Einsatz aber würde nicht zu einer anderen Geometrie und auch nicht zu einem anderen Geometrieverständnis führen [Hol, S. 48]. Sträßer hingegen, der der Beantwortung dieser Frage eine semiotische Sicht auf die Geometrie voranstellt, meint, dass die Geometrie bzw. die Geometrieauffassung sich durch den Einsatz eines DGS sehr wohl ändert, da sich „*die Geometrieauffassung der Software (das zugrunde gelegte Modell) zwischen das zu konstruierende Wissen und die subjektive Vorstellung der Lernenden schiebt*.“ [Strä, S. 53].

5.3.2 Grundsätzliches zu DGS

Hölzl [Höl, S. 34] und Elschenbroich [El, S. 13], beide namhafte Fachdidaktiker mit vielen Forschungsaktivitäten im Bereich DGS, fordern für Dynamische Geometriesysteme Folgendes:

1. ***Zugmodus:*** Die Dynamischen Geometriesysteme müssen die euklidisch geprägte Schulgeometrie und deren Werkzeuge „dynamisch“ modellieren.

[27] Dies wurde mir auch von H. Hischer persönlich bestätigt.
[28] Ein solches Unterfangen könnte für viele Themen der Mathematik spannende Forschungsfragen und interessante Diskussionen aufwerfen.

2. ***Ortslinie:*** Die Dynamischen Geometriesysteme müssen die Bahnbewegung von Punkten, die in Abhängigkeit zu anderen Punkten stehen, visualisieren.

3. ***Makro:*** Dynamische Geometriesysteme sollen eine Sequenz von Konstruktionsbefehlen zu einem neuen Befehl (Makro) zusammenfassen können.

Für Hischer ist letztere Eigenschaft bzw. Möglichkeit ein Kennzeichen jeglicher (guter) Anwender/innenprogramme und daher nicht allein typisch für DGS [Hi2, S. 279]. Die fundamentale Eigenschaft aller DGS ist so Hischer [Hi2, S. 279] der Zugmodus, der „*die Visualisierung von sowohl metrischen als auch nicht metrischen Invarianten der Geometrien“* [Hi2, S. 279] erlaubt.

An drei unterschiedlichen Beispielen (Seitenmittelvielecke, Ellipse als Ortslinie und Inversion am Kreis) illustriert er die Bedeutung der DGS für den Unterricht [Hi2, S. 280 ff.]. Zum einen wird der Computer als Entdecker, zum anderen werden die neuen Medien als Verführer, die ein Nachdenken auch weiterhin unumgänglich machen, vorgestellt. Weiters schlägt Hischer vor, dass Konstruktionen und deren Veränderungen mittels Zugmodus nicht zur Frage: „*Wer kann das beweisen?*“, sondern zur Frage[29]: „*Wer kann begründen, warum das gilt?*“, führen sollen [Hi2, S. 280]. Ferner ermöglicht ein Unterricht, der von vielseitigem Experimentieren geprägt ist, dass Schülerinnen und Schüler Irr- bzw. Umwege gehen, gelegentlich also merken, dass eine erste „Erkenntnis“ falsch war [Hi2, S. 281]. Dies erscheint mir besonders hervorhebenswert, da ich hier einige von Heymann formulierte Kriterien bzw. Merkmale einer allgemein bildenden Unterrichtskultur wieder finde, die er folgendermaßen formulierte [Hey, S. 264]:

- „Fehler werden zum Anlaß genommen, über Gründe für diese Fehler nachzudenken“
- „Fehler werden als notwendige Begleiterscheinung von Lernprozessen akzeptiert.“
- „Es gibt Raum für Umwege, ungewöhnliche Ideen, Offenheit für unterschiedliche Verläufe des Unterrichts.“

[29] Hischer meint, dass es ratsam sei, den „*begründenden Aspekt eines Beweises*“ deutlich zu machen und ihn hervorzuheben gegenüber dem „*wahrheitssichernden Aspekt eines Beweises*“ [Hi2, S. 119].

- „Mathematiklernen wird häufig als ein Erkundungsprozeß erfahren, der allein oder gemeinsam mit anderen in intensivem Austausch von Ideen und Argumenten vollzogen wird."

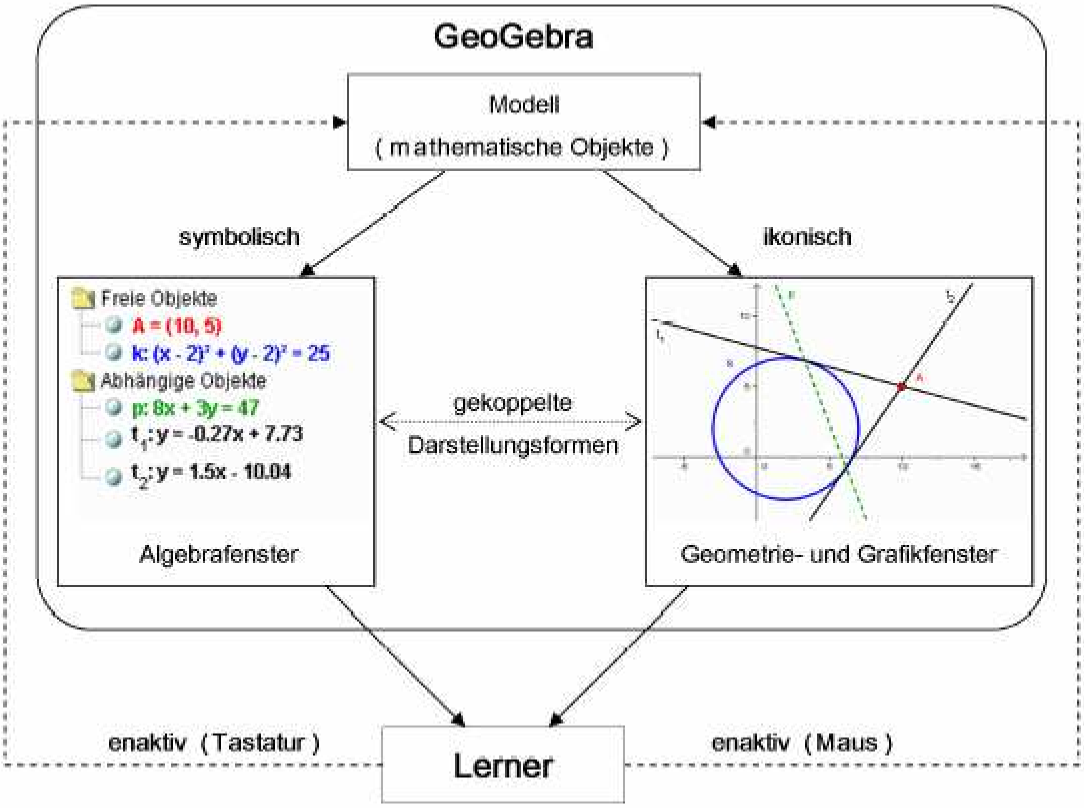
Es scheint also, als würden DGS – sofern sie nicht nur als Präsentationsmedium von Lehrerinnen und Lehrern eingesetzt werden – eine allgemein bildende Unterrichtskultur fördern, wenn nicht sogar hervorrufen, solange der Erkundungsprozess und der Raum für Umwege gewährt werden.

Ferner sei erwähnt, dass Hischer empfiehlt, auch die in vielen DGS fest implementierten geometrischen Abbildungen wie Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen „von Hand" nachbauen zu lassen [Hi2, S. 283]. Damit plädiert er für eine Öffnung bzw. Nachbildung der von DGS zur Verfügung gestellten Black Boxes.

5.3.3 GeoGebra

GeoGebra ist eine von Markus Hohenwarter erstellte „Unterrichtssoftware" [Hoh, S. 11], deren Entwicklung mit Hohenwarters Diplomarbeit begonnen und als Dissertationsprojekt, gefördert von der Akademie der Wissenschaften, fortgesetzt wurde.

GeoGebra ist – nach Hohenwarter – ein computerbasiertes Werkzeug, das durch die Verbindung von symbolischer und ikonischer Darstellung aktives, handlungsorientiertes, experimentelles und entdeckendes Lernen fördert [Hoh, S. 16]. GeoGebra bietet diese beiden Darstellungsformen mathematischer Objekte im Geometrie- und Algebrafenster parallel an. Hinzukommt, dass enaktives, also handelndes Lernen mittels GeoGebra ermöglicht wird.



Enaktives, ikonisches und symbolisches Lernen mit GeoGebra [Hoh, S. 24]

Schülerinnen und Schüler können ikonische, bildhafte Darstellungen im Geometrie- und Grafikfenster über die Maus sowie symbolische Darstellungen über die Tastatur aktiv erstellen und beeinflussen [Hoh, S. 25]. Diese Möglichkeit unterscheidet GeoGebra von klassischen DGS sowie CAS und wird am besten durch den bereits erwähnten Begriff der bidirektionalen Koppelung beschrieben. Die dahinter steckende Idee ist die Verbindung dieser beiden Softwaretypen, von der Vorteile für das Verständnis von Mathematik erhofft bzw. erwartet werden. Ausgehend von Raymond Duvals Theorie, dass mathematische Objekte nicht direkt, sondern nur über semiotische Repräsentationen zugänglich sind und ein Verstehen mathematischer Zusammenhänge erst durch den Wechsel dieser entstehen kann, scheint für Markus Hohenwarter nicht nur ein bloßes Nebeneinander, sondern vielmehr ein Miteinader von DGS und CAS wichtig [Hoh, S. 79 f.]. Ein System, dass den Wechsel zwischen geometrischen und algebraischen Repräsentationen zulässt, sollte diesen am besten bidirektional – also in beide Richtungen – ermöglichen [Hoh, S. 80]. Von einem solchen bidirektionalem System ist zu erwarten, dass zum Beispiel ein Kreis wie in einem herkömmlichen DGS dynamisch konstruiert und seine Gleichung angezeigt werden kann; dass ein Kreis aber auch wie in einem CAS mittels seiner Gleichung eingegeben und dargestellt werden kann und dass ferner der Kreis dynamisch mit der Maus verschoben werden kann. Es versteht sich von selbst und GeoGebra macht es möglich, dass die durch die dynamischen Verschiebungen hervorgerufenen Änderungen, unmittelbar bzw. sofort an der Kreisgleichung (im Algebrafenster) ersichtlich werden und umgekehrt.

Für Markus Hohenwarter ist offenkundig, dass ein solches Programm nicht alle Möglichkeiten eines DGS und CAS umfassen muss bzw. kann. Er hat sich bei der Entwicklung von GeoGebra vor allem für eine einfache und überschaubare Gestaltung entschieden [Hoh, S. 81]. Als typische Grundobjekte eines DGS bietet GeoGebra Punkte, Geraden, Strecken, Vielecke, Kreise, allgemeine Kegelschnitte und Vektoren[30] an, als typische Grundobjekte aus dem CAS Bereich wurden Zahlen (bzw. Parameter), Winkel, polynomiale Gleichungen 1. und 2. Grades (für Geraden und Kegelschnitte) und Funktionen in GeoGebra implementiert [Hoh, S. 83].

Die von Markus Hohenwarter im Rahmen seiner Dissertation durchgeführte Online-Befragung von Lehrerinnen und Lehrern, spiegelt den Stand des Schuljahres 2004/2005 wider, da die Fragebögen von Juni bis Juli 2005 über die Homepage von GeoGebra zugänglich waren [Hoh, S. 233]. Die 202 teilnehmenden Lehrerinnen bzw. Lehrer stellten GeoGebra ein größtenteils positives Zeugnis aus. Am häufigsten kam GeoGebra in der 11. Schulstufe zum Einsatz, was Markus Hohenwarter auf die Fülle der im Internet frei verfügbaren Unterrichtsmaterialien[31] aus dem Bereich der Analysis zurückführt [Hoh, S. 238]. In der Sekundarstufe 1 insbesondere in der 7. Schulstufe scheint GeoGebra vor allem als reines DGS verwendet zu werden [Hoh, S. 238]. Die positive Bewertung der Software und deren Einsatz im Unterricht zeigt sich auch daran, dass 97,2% der Lehrerinnen und Lehrer der Aussage: „GeoGebra ist für meine SchülerInnen einfach zu bedienen.“, zustimmen. Fast eben so hohe Zustimmung wird bei den folgenden beiden Aussagen erreicht [Hoh, S. 241 ff.]:

1. Der Einsatz von GeoGebra hat das Interesse meiner SchülerInnen am Unterricht gesteigert: 93,7%
2. Mit GeoGebra haben meine SchülerInnen die Unterrichtsinhalte besser verstanden: 95,8%

[30] Nur wenige DGS kennen Vektoren, einige aber Pfeile.
[31] Ein Großteil der Materialien wird über die Website www.geogebra.at (gültig am 01.12.2006) angeboten.

Auch die Schülerinnen und Schüler äußern sich laut M. Hohenwarter überwiegend positiv zu GeoGebra, wobei aber zu berücksichtigen ist, dass die Stichprobe hier eine sehr kleine (84 Schülerinnen bzw. Schüler der 5. bis 13. Schulstufe) war [Hoh, S. 251 ff.]. Dennoch ist bemerkenswert, dass für 93,7% der Schülerinnen bzw. Schüler GeoGebra einfach zu bedienen ist und immerhin 68,1% angeben, mit GeoGebra besser Mathematik zu verstehen [Hoh, S. 253]. Offen bleibt bei dieser Evaluation allerdings, wie GeoGebra beim Verstehen von Mathematik helfen kann. Dies und die Frage, ob neue Medien überhaupt zum Verstehen von Mathematik beitragen können, sind wesentliche Aspekte meines Forschungsinteresses und der von mir durchgeführten Evaluation von (online) Lernpfaden (siehe Kapitel 7).

5.4 Tabellenkalkulation im Mathematikunterricht

Die Tabellenkalkulation scheint für Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrer ein nützliches, aber weitaus weniger wichtiges Werkzeug als CAS oder DGS zu sein. Auf der Suche nach entsprechender Literatur zeigt sich, dass die Tabellenkalkulationen stets in Verbindung mit Begriffen wie „rekursiv“, „Funktionsplotter“ und „Modellierung“ gelegentlich auch im Zusammenhang mit „Stochastik“ genannt wird. Auch Manfred Borovcnik widmet sich in vielen Schriften und Vorträgen dem Statistikunterricht unterstützt durch die Tabellenkalkulation. So referierte er beispielsweise im Jahr 2006 bei der Lehrer/innenfortbildungstagung der ÖMG über die „Ideen zur Unterweisung in Statistik im Gewand von Tabellenkalkulation“[32].

Einige Lehrveranstaltungen[33] verschiedenster Universitäten, die Titel wie beispielsweise „Computereinsatz im Mathematikunterricht“ tragen, weisen manchmal auf die weite Verbreitung dieser Software im Berufsalltag hin und beinhalten häufig eine Einführung in die Nutzung dieser, gehen aber selten darüber hinaus. Selbst Horst Hischer führt im Zusammenhang mit der Tabellenkalkulation als Beispiel nur eine weitere Realisierung eines Funktionsplotters an [Hi2, S. 259 ff.].

Viele der in den 1990er approbierten Mathematikschulbücher der Sekundarstufe 1 weisen im Rahmen der Integration neuer Technologien einen „Computer-Anhang“ auf, der

---

[32] http://www.oemg.ac.at/DK/ProgrammOeMGLFT2006.pdf , gültig am 17.10.2007
[33] Z.B.: http://www.math.uni-frankfurt.de/~lambert/WS0607/FDS_LA_MI.pdf, gültig am 26.12.2006

sich ausschließlich an Tabellenkalkulationsprogrammen orientiert. Im Lehrbuch „Das ist Mathematik 1" wird im „Computer-Anhang" [Re4, S. 270 ff.] mit Excel gearbeitet und die Funktionsweise des Summensymbols, die Berechnung des Mittelwerts und das Erstellen von einfachen Diagrammen anhand von Aufgaben aus dem Buch geübt.

Aus meiner eigenen Unterrichtserfahrung weiß ich, dass Tabellenkalkulation beispielsweise bei der Bearbeitung von großen Datenmengen im Bereich der Beschreibenden Statistik den Schülerinnen und Schülern hilft, die Bedeutung, Relevanz und Sinnhaftigkeit des Themas zu erfassen.

Zum Abschluss dieses kurzen Abschnitts über den Einsatz von Tabellenkalkulationsprogrammen im Mathematikunterricht sei noch auf die Bedeutung dieser im Bereich der Informatik bzw. Didaktik der Informatik hingewiesen. Peter Hubwieser beschäftigt sich in diesem Zusammenhang mit der „*Funktionalen Modellierung*" [Hub, S. 193 ff.]. Die funktionale Modellierung wird in der Didaktik der Informatik als wichtiger Gegenstandsbereich der informatischen Bildung angesehen und beinhaltet unter anderem die folgenden Schwerpunkte:

1. Funktionen als Daten verarbeitende Prozesse
2. Prozesse und Teilprozesse
3. Datenflüsse und Datenflussdiagramme
4. Simulation mittels Tabellenkalkulation

Hubwieser greift hierzu ein einfaches Beispiel der Datenverschlüsselung (polygraphische Caesar-Addition) auf und zeigt, wie man Modelle dieser Art mit einer makroprogrammierbaren Tabellenkalkulation simulieren kann [Hub, S. 193]. Er schlägt vor, *MS-Excel*® in Verbindung mit *Visual-Basic*® zur Implementierung eines einfachen Verschlüsselungsalgorithmus zu verwenden [Hub, S. 198]. Die primären Lernziele der von ihm dargestellten Lektion betreffen die Modularisierung komplexer Systeme und die Kommunikation zwischen den Modulen sowie weniger spezielle Verfahren zur Datenverschlüsselung oder deren mathematische Aspekte [Hub, S. 193].

5.5 Das Internet im Mathematikunterricht

Ein Kapitel, welches die Überschrift „Das Internet im Mathematikunterricht“ trägt und zudem nur eines von fünf Unterkapiteln des Abschnitts „Computer im Mathematikunterricht“ ist, kann im Rahmen dieser Arbeit keinesfalls vollständig die dazu vorhandenen Forschungsergebnisse abdecken. Eher können Akzente gesetzt und einzelne wichtige Aspekte angesprochen werden. Daher werde ich zuerst zentrale Begriffe wie Hypermedia und Interaktivität klären und danach den Einfluss von Lerntheorien auf digitale Lernangebote aufzeigen.

5.5.1 Konzepte zur Aufbereitung multimedialer bzw. hypermedialer Inhalte

Für die Aufbereitung multimedialer bzw. hypermedialer Lerninhalte braucht es längst schon mehr als bloße Programmierkenntnisse. Viele wissenschaftliche Disziplinen erforschen mittlerweile, was bei der Erstellung und Gestaltung von „Lernsoftware“[34] zu berücksichtigen ist. Aus dem Bereich der Psychologie sind es vor allem die Teildisziplinen Kognitionspsychologie, Lernpsychologie und pädagogische Psychologie, die sich mit „Lernsoftware“ beschäftigen [Er, S. 7 ff.]. Bevor ich hier jedoch die Lerntheorien und ihren Einfluss auf die Gestaltung von digitalen Lernumgebungen skizziere, bedarf es einer Klärung der Begriffe „Multimedia“, „Hypertext“ und „Hypermedia“.

5.5.1.1 Multimedia und Hypertext – Hypermedia

Rolf Schulmeister, Professor für Hochschuldidaktik am interdisziplinären Zentrum für Hochschuldidaktik der Universität Hamburg, mit den Arbeitsschwerpunkten Multimedia und E-Learning, definiert den Begriff *Multimedia* wie folgt:

> „*Multimedia ist eine interaktive Form des Umgangs mit symbolischem Wissen in einer computergestützten Interaktion.*“ [Schu1, S. 16]

[34] Als „Lernsoftware“ bezeichne ich jegliche Realisierung, die Lernen mit dem und durch den Computer ermöglicht.

Für Gabi Reinmann, seit 2001 Professorin für Medienpädagogik an der Universität Augsburg mit dem Schwerpunkt Wissen, Lernen, Medien (E-Learning/Blended Learning und Wissensmanagement), ist mit *Multimedialität*:

> „*die Möglichkeit gemeint, Information und Wissen durch die Integration verschiedener Medien und verschiedener Symbolsysteme darzustellen.*“ [Rei, S. 6]

Nach Michael Kerres, Professor für Mediendidaktik an der Universität Duisburg-Essen, bezieht sich der Begriff *Multimedia*:

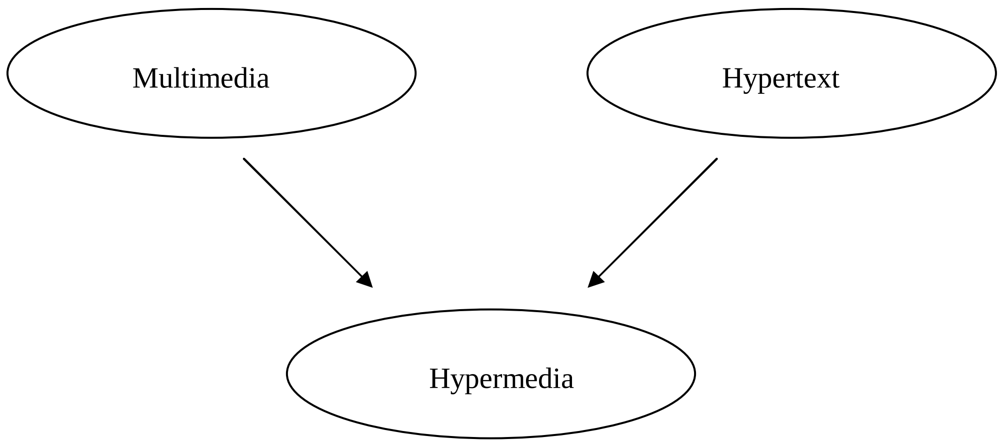
> „*auf technische Systeme, die in der Lage sind, verschiedene Datentypen, wie Texte, Grafiken, Ton und Bewegtbild, zu verarbeiten und für den interaktiven Abruf vorzuhalten.*“ [Ker, S. 13]

Multimedia meint also im weitesten Sinne eine Technologie, die computerunterstützte Interaktion mit einem multiplen Mediensystem ermöglicht [Iss, S. 267].

Der Begriff *Hypertext* hingegen wird von Gabi Reinman als „*eine Form der Repräsentation von Informationen, die entgegen der traditionellen linearen Strukturen auch Verzweigungen aufweisen, die nur auf Aufforderung sichtbar werden*“, bezeichnet [Rei, S. 94].

Peter Baumgartner umschreibt den Begriff Hypertext als „*vernetztes Informationsangebot*“ [Bau, S. 141] und weist darauf hin, dass ein Hypertext von der Struktur her eine Ansammlung von Dokumenten (Knoten) ist, die durch bestimmte Verbindungen (Links) miteinander verknüpft sind [Bau, S. 141]. Das Besondere an diesen Verbindungen ist jedoch, dass sie durch den Benutzer bzw. die Benutzerin aktivierbar sind [Bau, S. 141].

Von Hypermedia wird gesprochen, wenn Multimedia und Hypertext miteinander verbunden werden, folglich gemeinsam auftreten. Wenn also beispielsweise Textbausteine (Hypertexte) mit Filmen, Tonsequenzen, Bildern usw. verbunden bzw. verlinkt werden. Astrid Ernst hält die Definition eines Hypermediums in folgender Grafik fest [Er, S. 55]:



Für Peter Baumgartner hingegen braucht es den Begriff Hypermedia nicht, in seinem Verständnis kann Hypertext durchaus Bilder, Filme, Ton, Grafik usw. umfassen [Bau, S. 141]. Nach Issing bräuchte es den Begriff Hypermedia vermutlich auch nicht, denn seine Definition von Multimedia umfasst verschiedenste Repräsentationsformen wie Daten, Text, Ton, Grafik, Animation, Standbild, Bewegtbild und Realzeit-Simulationen im Cyberspace [Iss, S. 267]. Tatsache ist, alle drei Begriffe werden in der Literatur nebeneinander verwendet und von Fall zu Fall wird zu hinterfragen sein, was mit dem jeweiligen Begriff nun wirklich gemeint ist und was er umfasst.

Neben diesen Begrifflichkeiten sind noch zwei weitere Aspekte – *Struktur* und *Navigation* – bedeutend für das WWW, das nichts anderes als ein frei zugängliches weltweites Hypermedia-System ist [Döri, S. 33 ff.].

Hypermedia-Systeme werden hinsichtlich der Art und Weise, wie die zugrunde liegende Datenbasis strukturiert wird (Organisationsstruktur), unterschieden. Zum einen gibt es so genannte „*unstrukturierte*“ Hypertextbasen, die einen assoziativen Zugriff von jedem Knoten bzw. jeder Informationseinheit auf jeden anderen damit verknüpften Knoten und damit eine weitgehend freie Exploration von Information ermöglichen. Zum anderen treten „*strukturierte*“ Hypertextbasen auf, denen *lineare*, *hierarchische* oder *netzartige* Organisationsprinzipien zugrunde liegen. Diese stellen die Informationen systematisch zur Verfügung. Dabei dienen *lineare* Strukturen eher dazu, den Benutzer bzw. die Benutzerin in neue Inhalte einzuführen, *hierarchische* Strukturen haben den Vorteil, dass die Darstellung der Inhalte auf unterschiedlichen Ebenen von Abstraktheit möglich ist und *netzartige* Strukturen ermöglichen schließlich die Repräsentation und Realisationen vielfältiger semantischer Beziehungen zwischen verschiedenen Informationseinheiten [Rei, S. 95]. Natürlich können auch gemischte Strukturen auftreten.

Ferner werden Hypermedia-Systeme aber auch bezüglich ihrer Navigationsmöglichkeiten unterschieden. Die drei häufigsten Formen des Informationszugriffs sind nach Reinmann [Rei, S. 95]:

- *Das Browsing*: was so viel wie „Herumstöbern“ bedeutet und einen eher unsystematischen Informationszugriff beschreibt.
- *Die gezielte Suche* nach Informationen erfolgt mit Hilfe von Suchalgorithmen.
- *Ein Folgen von Pfaden* liegt vor, wenn eine bestimmte Abfolge fest verknüpfter Informationseinheiten angeboten wird, bei der man jedoch auch abweichen und zurückspringen kann.

Um Reinmanns Ausführungen, insbesondere aber die Bedeutung des hier verwendeten Begriffs „Suchalgorithmen“, richtig interpretieren zu können, muss ein Blick auf Reinmanns Quelle Tergan S.-O. [Ter] gemacht werden. Er hält nämlich fest, dass sich die *gezielte Suche* vom *Browsing* durch die Verwendung von „*Schlüsselbegriffen und Suchalgorithmen*“ unterscheidet und zielt mit seiner Formulierung in erster Linie *nicht* auf die Suchalgorithmen[35] von Suchmaschinen ab, sondern auf die Suchstrategien bzw. das Suchverhalten von Menschen im WWW [Ter, S. 103 ff.].

Eine Suche nach dem Begriff „Allgemeinbildung“ am 29.12.2007 ergab bei Google (www.google.at und www.google.de) eine Anzahl von etwa 1.700.000 Seiten, bei Yahoo (www.yahoo.de bzw. www.yahoo.at) eine Anzahl von etwa 1.410.000 bzw. 1.390.000 Seiten. Schränkt man die Suche weiter ein, in dem man den Begriff „Allgemeinbildung“ mit den Begriffen „Mathematik“, „Heymann“ und „Computereinsatz“ durch ein logisches „UND“ verknüpft, so ergeben sich bei Google 215 Treffer und bei Yahoo nur noch 84 Treffer. Anhand dieses Beispiels wird deutlich, dass die im WWW Suchenden auch bei der Verwendung von Suchmaschinen spezielle Verfahren, Strategien oder Algorithmen brauchen, um aus dieser Vielzahl an Quellen die relevanten herauszufiltern.

[35] Detaillierte Informationen zur Dokumentsuche und Dokumenterschließung, insbesondere zur Funktionsweise von Suchmaschinen und zur Suche im World-Wide Web, können beispielsweise bei R. Ferber [Fe] nachgelesen werden.

Reinmann schließt ihre Ausführungen zu Hypermedia-Systemen mit der Darstellung der Mitte der 1990er Jahre beginnenden Ernüchterung in der Hypermedia-Welt und den oft enttäuschten hohen Erwartungen, die in Hypermedien bezüglich der Förderung von Lernprozessen gesetzt wurden, ab [Rei, S. 96]. Sie macht allerdings auch klar, dass sich mittlerweile gezeigt, dass:

(1) Experten und Expertinnen besonders gut von nicht-linearen Strukturen profitieren [Rei, S. 96],
(2) Novizen und Novizinnen hingegen besser lernen, wenn sie Pfaden folgen [Rei, S. 96] und
(3) der Erfolg eines Hypermediums entscheidend von den Rahmenbedingungen des Einsatzes und von der Konzeption der Lernumgebung abhängt [Ter, S. 106].

Zu guter Letzt möchte ich noch zwei Problembereiche aufwerfen, die stets in einem A-temzug mit Hypermedien genannt werden, auf einige didaktische Aspekte hypermedialer Lernsysteme und manche Vorteile digitalen Lernens hinweisen.

In der Literatur, aber auch all jenen, die schon mit Hypermedia-Systemen gearbeitet haben, sind die folgenden zwei Probleme bekannt:

(1) cognitive overhead
Darunter wird die zusätzliche kognitive Beanspruchung bei der Eigensteuerung von Lernprozessen mit Hypermedia-Systemen verstanden. Die Lernenden müssen beim Wissenserwerb mit Hypermedia-Systemen sich nicht nur das Wissen des jeweiligen Lerngegenstands aneignen, sondern erst auch nach relevanten Informationen suchen, was eines zusätzlichen Aufwands – nämlich der Navigation im System – bedarf [Er, S. 59].

(2) lost in hyperspace
Die Desorientierung von Hypermedia-Nutzerinnen bzw. Nutzern stellt ein klassisches Problem der Hypermedia-Systeme dar. Bei umfangreichen Datenbeständen können Nutzerinnen und Nutzer leicht den Überblick darüber verlieren, wo im Netz sie sich gerade befinden.

Zumindest dem zweiten Problembereich kann mit entsprechenden Navigationsmöglichkeiten beigekommen werden. Für Systeme mit einer besonderen didaktischen Ausrichtung empfehlen sich Pfadvorgaben [Ker, S. 253], intelligente Unterstützung des Lernprozesses durch das System, beispielsweise die Analyse des Lernwegs und daraus folgende Vorschläge für weiteres Vorgehen, wären eine andere Möglichkeit, die aber einen enorm hohen Aufwand für die Ersteller und Erstellerinnen des Systems bedeuten [Er, S. 63].

Rolf Schulmeister nennt in seinem Aufsatz „Didaktische Aspekte hypermedialer Lernsysteme“ [Schu2] drei für ihn besonders brisante und zugleich pragmatisch realisierbare Aspekte, die auch mir sehr wichtig erscheinen, weil sie

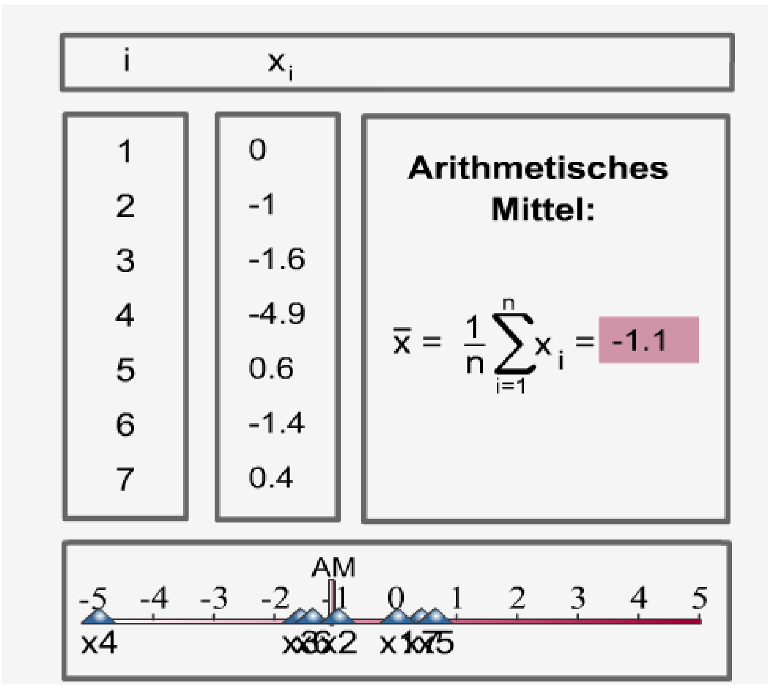
a.) für jegliche Unterrichtsplanung bzw. -gestaltung bedeutend sind, aber
b.) mit Hypermedia-Systemen möglicherweise „besser“ realisierbar sind.

Zuerst führt Schulmeister an, dass es notwendig ist, an die Lernvoraussetzungen der Studierenden *anzuknüpfen* bzw. es den Studierenden zu ermöglichen, sich den Anknüpfungspunkt entsprechend ihren Lernvoraussetzungen auswählen zu können [Schu2, S. 2]. Die Tatsache selbst ist nichts Neues, jeglicher guter Unterricht wird versuchen an die Lernvoraussetzungen der Lernenden anzuknüpfen. In einer Schulklasse kann hier vermutlich mehr als bei einer Lehrveranstaltung der Universität davon ausgegangen werden, dass alle Lernenden etwa ähnliche Lernvoraussetzungen (im Sinne von Vorwissen, Fertigkeiten, Kenntnissen) mitbringen, dennoch kann es auch für Schule und Unterricht erstrebenswert sein, den Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit zu geben, den Anknüpfungspunkt entsprechend ihren Lernvoraussetzungen zu wählen. Meiner Erfahrung nach kann mit einem entsprechend gestalteten Hypermedia-System, das eine individuelle Navigation und Selektion ermöglicht, ein wesentlicher und von den Lernenden individuell wählbarer Beitrag zum Anknüpfen an Lernvoraussetzungen geleistet werden.

Den *zweiten Aspekt* nennt Schulmeister „*kognitive Re-Interpretation wissenschaftlicher Stoffe*“ [Schu2, S. 5]. Am Beispiel Studierender der Statistik zeigt er, dass sich deren Denk- und Lernprozesse nicht immer nach sachlogischen Strukturen richten, sondern vielmehr ideosynkratische Züge annehmen [Schu2, S. 5]. Daher erachtet Schulmeister eine Analyse der realen Lernprozesse als notwendig, um damit die naiven kognitiven

Konzepte und kognitiven Fehler der Studierenden zu erfassen. Es konnte unter anderem festgestellt werden, dass das in vielen Statistikformeln vorkommende Summenzeichen Σ für viele Studierenden keine Operationsvorschrift darstellt, sondern bloß ein Bild ohne klaren Inhalt ist. Nach Schulmeister genügt es also nicht, die Formel „sauber“ zu erklären, vielmehr wird die Operation erst durch konkret-anschauliche Manipulationen verankert [Schu2, S. 6]. Ähnliches gilt zweifelsohne für viele Inhalte der Schulmathematik.

Als *dritten Aspekt* nennt Schulmeister die Bedeutung der *Interaktion* für das Lernen [Schu2, S. 8]. Mit dem Statistik Lernprogramm LernSTATS[36] hat er gezeigt, wie ein hoher Grad an Interaktion realisierbar ist. Am Beispiel des arithmetischen Mittels lässt sich sehr gut veranschaulichen, welche Art der Interaktivität gemeint ist.



http://www.lernstats.de/web/php/uebungen.php?lang=de&sub=zentrale_tendenz?04_04

Mit der hier als eingefrorenes Bild dargestellten interaktiven Übung kann von den Lernenden nachvollzogen werden, welchen Effekt Ausreißer auf den Mittelwert haben. Mit der Verschiebung der Werte (auf der Skala von -5 bis 5) durch den/die Benutzer/in ändert sich auch das arithmetische Mittel, die Auswirkungen werden also für die Lernenden sofort und unmittelbar sichtbar. Schulmeister betont, dass in diesem Beispiel der übliche Weg von den Daten zur Grafik auf den Kopf gestellt wird und es stattdessen

[36] http://www.lernstats.de gültig am 07.02.2007

den Lernenden möglich ist, durch konkret-anschauliche Operationen auf der Grafik die Daten zu manipulieren. Bei dieser Form der Interaktion handelt es sich nach Meinung Schulmeisters um einen Typus „direkter Manipulation“ [Schu2, S. 8].

Dass die Interaktivität ein großer Vorteil der neuen Medien und computergestützter Lernprogramme ist, ist mittlerweile vielfach bewiesen worden. Was daran für Jugendliche so attraktiv ist, erklärt Schulmeister damit, dass sich die Mensch-Programm-Interaktion im Gegensatz zur sozialen Interaktion dadurch auszeichnet, dass sie frei von sozialen Konsequenzen ist [Schu2, S. 9 f.]. Der Computer scheint nach Schulmeister bei Jugendlichen so beliebt zu sein, weil er einerseits Rückmeldungen und Bewertungen abgeben kann, andererseits diese aber auch wieder löschen und „vergessen“ (machen) kann, während im Gegensatz dazu ein einmal auf den Lehrer oder die Lehrerin gemachter Eindruck „fatale Folgen“ haben kann [Schu2, S. 10]. Es scheint so, als spiele die Anonymität und Sanktionsfreiheit bei der Interaktion mit Programmen eine ganz wesentliche Rolle für die Lernmotivation [Schu2, S. 10].

5.5.1.2 Interaktivität

Den vorhergehenden Ausführungen ist zu entnehmen, dass Interaktivität ein wesentlicher Bestandteil neuer Medien sein kann und muss. Einmal mehr muss auch hier zuerst eine Begriffsklärung vorgenommen werden. Interaktivität scheint besonders für den Mathematikunterricht enormes Potential zu haben. Im Kapitel 7 werde ich noch einmal auf die nun folgende Begriffsklärung Bezug nehmen.

Peter Baumgartner versteht unter Interaktivität die Möglichkeit, „*daß der Benutzer nicht nur bloßer Rezipient ist, sondern in den medialen Informations-, Kommunikations- und Lernprozeß gestaltend einbezogen wird*“ [Bau 1, S. 128]. Anders als beim Lesen eines Buches, Hören eines Radioprogramms, Sehen eines Fernsehprogramms, wo man nur als „Leser/in“, „Hörer/in“ bzw. „Seher/in“ partizipieren kann, drückt bereits der Begriff „Benutzer/in“ das aktivere Verhältnis zum Medium aus [Bau, S. 128] und weist der Begriff Interaktivität daraufhin, dass sich Mensch und Computer in ihrem Verhalten wechselseitig beeinflussen können.

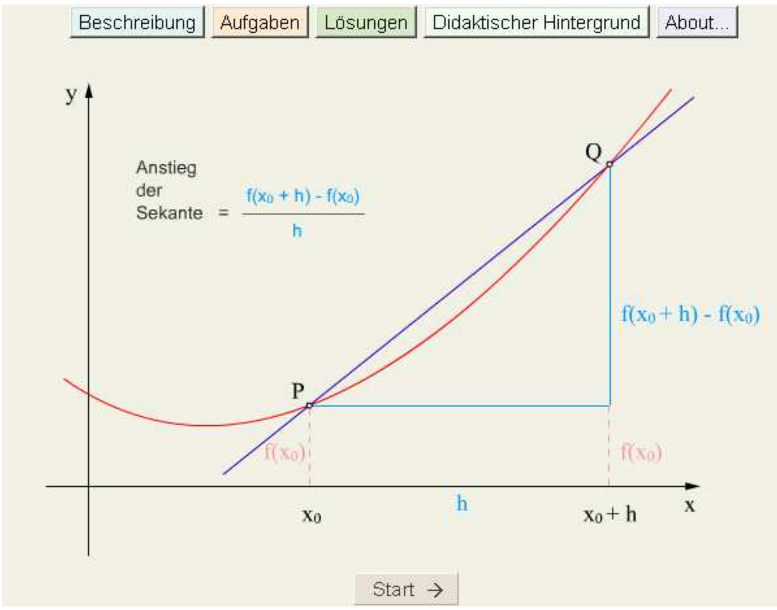
Rolf Schulmeister versteht Interaktivität als „Handeln mit den Lernobjekten oder Ressourcen eines Programms“ [Schu3, S. 194] und möchte Interaktivität nicht im Sinne von Kommunikation und Kooperation verstanden wissen. Sein aus dem Jahr 2002 stammender Vorschlag zu einer Taxonomie der Interaktivität von Multimedia scheint mir nicht nur einen Beitrag zur damals und derzeit noch aktuellen Metadaten[37]-Diskussion zu liefern, sondern macht auch deutlich, welche Interaktivitätsniveaus es zu unterscheiden gilt und welche Korrelationen zu den bekannten Lerntheorien gegeben sind.

Seine Taxonomie der Multimedia-Komponenten weist sechs Stufen auf, wobei Schulmeister als Basis seiner Taxonomie multimediale Lernsysteme wählt, die neben Text auch Bilder, Grafiken, Animationen, Filme, Audiobeispiele, Tabellen, Formeln, JavaApplets sowie Flash-Programme etc. enthalten [Schu3, S. 194].

Bei der *ersten Stufe „Objekte betrachten und rezipieren“*, zu der Schulmeister anmerkt, dass man eigentlich von einer Stufe 0 der Interaktivität sprechen müsste, weil es gar keine Interaktion gibt, werden im Text fertige Multimedia-Komponenten eingesetzt, die von den Benutzern bzw. Benutzerinnen betrachtet (Bild, Grafik) oder abgespielt (Ton, Film, Flash) werden können, wobei es keine Möglichkeit gibt, Einfluss auf die Darstellung der Komponenten zu nehmen. Die Objekte haben hier ausschließlich die Funktion der Information, Instruktion oder Illustration, ihr Inhalt kann nicht verändert werden [Schu3, S. 194].

[37] Metadaten sind im Allgemeinen Daten, die Informationen über andere Daten enthalten bzw. diese möglichst gut beschreiben. Z. B.: Eigenschaften von Lernobjekten, Zuordnung eines Lernobjekts zu einem Inhalt.

Die aus www.mathe-online.at bekannte Flash-Animation mit dem Titel *„Die Ableitung als Grenzwert*“ repräsentiert ein Objekt der Stufe I.



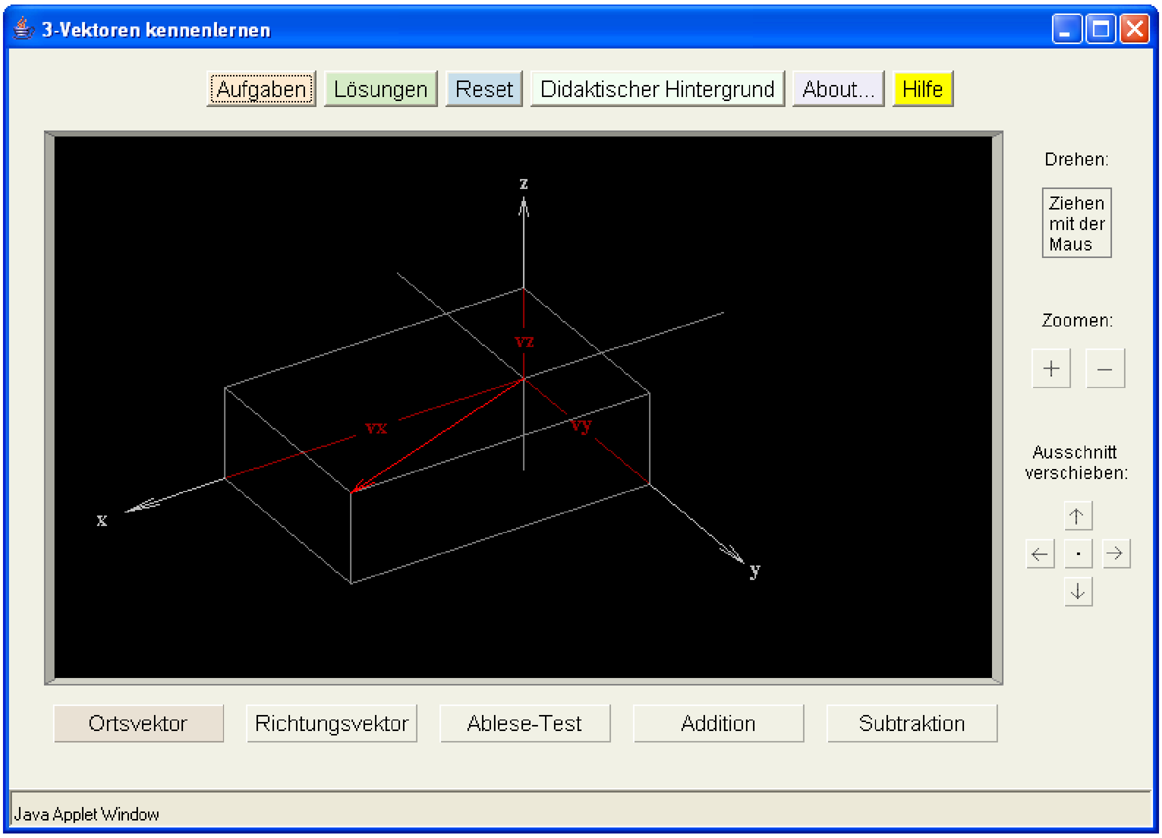
Der/die Benutzer/in hat nur die Möglichkeit die Animation zu starten, anzuhalten und fortzusetzen. Ein Eingriff in das Objekt oder eine Interaktion mit dem Objekt – zum Beispiel das Verändern der Funktion – ist hier nicht möglich. Der Sinn und Zweck dieses Objekts – Information und Illustration – wird aber in höchstem Maße erfüllt.

Auf der *Stufe II – „Multiple Darstellungen betrachten und rezipieren*“ – stehen ebenfalls nur fertige Objekte zur Verfügung, aber es existieren mehrere Varianten für einige Komponenten [Schu3, S. 194]. Auch auf dieser Stufe haben die Multimedia-Komponenten nur die Funktion der Information, Instruktion und Illustration, Objekte können nur betrachtet werden.

Multimedia-Komponenten, die der *dritten Stufe* der Interaktivität *„Die Repräsentationsformen variieren*“ entsprechen, ermöglichen den Lernenden einen aktiven Einfluss auf die Repräsentationen des Multimedia-Objekts. Die Benutzer und Benutzerinnen können zum Beispiel durch direkte Manipulation:

- zweidimensionale Grafiken skalieren,
- dreidimensionalen Grafiken rotieren lassen oder
- durch Klick auf Objekte in Filmen zu anderen Abschnitten des Films verzweigen [Schu3, S. 195].

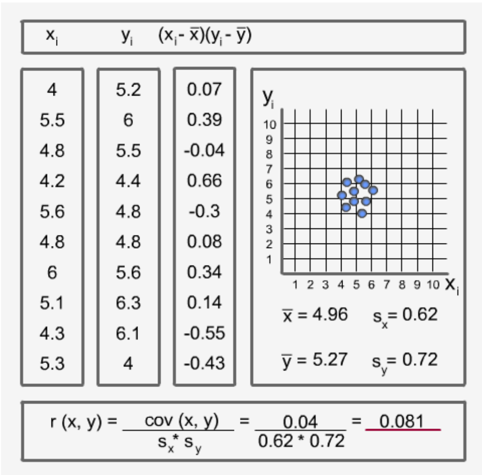
Ein wesentlicher Unterschied zu den zwei vorhergehenden Stufen, aber auch zu den nachfolgenden Stufen der Interaktivität ist der, dass zwar die Repräsentationsform durch die Benutzerinnen und Benutzer verändert werden kann, nicht aber deren Inhalt. Diese Stufe der Interaktivität ist nach Schulmeister für die Motivation der Lernenden sehr bedeutsam.



Das oben abgebildete, aus www.mathe-online.at stammende Applet „*3-Vektoren kennenlernen*“ entspricht zumindest teilweise der Stufe III. Durch die Funktionen „Drehen“, „Zoomen“ und „Ausschnitt verschieben“ kann man aktiv Einfluss auf die Repräsentationsform nehmen, sobald man aber die Buttons „Addition“ und „Subtraktion“ anklickt, wird der Inhalt verändert und damit die Interaktivitätsstufe III verlassen.

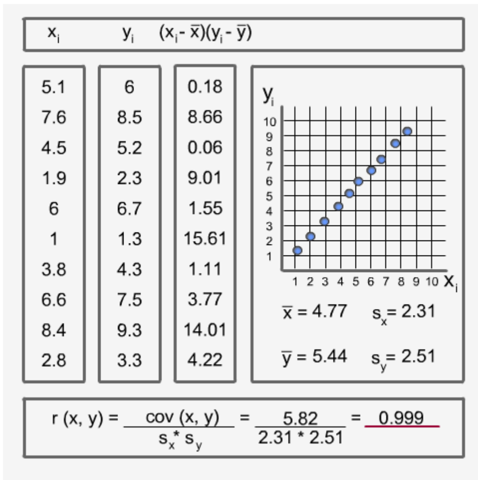
Die *Interaktivitätsstufe IV „Den Inhalt der Komponenten modifizieren“* zeichnet sich dadurch aus, dass der/die Benutzer/in durch die Eingabe von Daten oder das Variieren von Parametern innerhalb eines gesetzten Rahmens andere Darstellungen erzeugen oder andere Realisierungen visualisieren kann [Schu3, S. 195]. Die Multimedia-Komponenten werden auf dieser Stufe erst durch die Anforderung der Benutzer/innen erzeugt. Das Erzeugen anderer Darstellungen bzw. das Visualisieren anderer Relationen kann nach Schulmeister eine heuristische Funktion für Denkprozesse übernehmen und eine Interaktion mit den kognitiven Konzepten der Benutzer/innen eingehen [Schu3, S. 195]. Schulmeister verdeutlicht mithilfe von LernSTATS am Beispiel einer Übung zur Korrelation, was er meint.

Die Studierenden haben nach Schulmeister vom Begriff der Korrelation oft ein naives, unzureichendes Konzept. Für sie bedeutet Korrelation so etwas wie Nähe, Nachbarschaft oder Beziehung. Nach Schulmeister erzeugen Studierende, wenn sie aufgefordert werden eine hohe Korrelation zu erzeugen, folgendes Bild:



Bei dieser Übung können die Studierenden die Messwerte im Diagramm verschieben, wobei sich die Werte x_i, y_i, … und r(x,y) automatisch auch verändern.

Die Interaktivität erlaubt den Studierenden aber nun, das Konzept der Korrelation durch Modifizierung des Inhalts zu entdecken. Die einzelnen Punkte bzw. Messwerte können so lange verschoben werden, bis die gewünschte hohe Korrelation erreicht und eine Darstellung wie etwa die nebenstehende erzeugt ist.

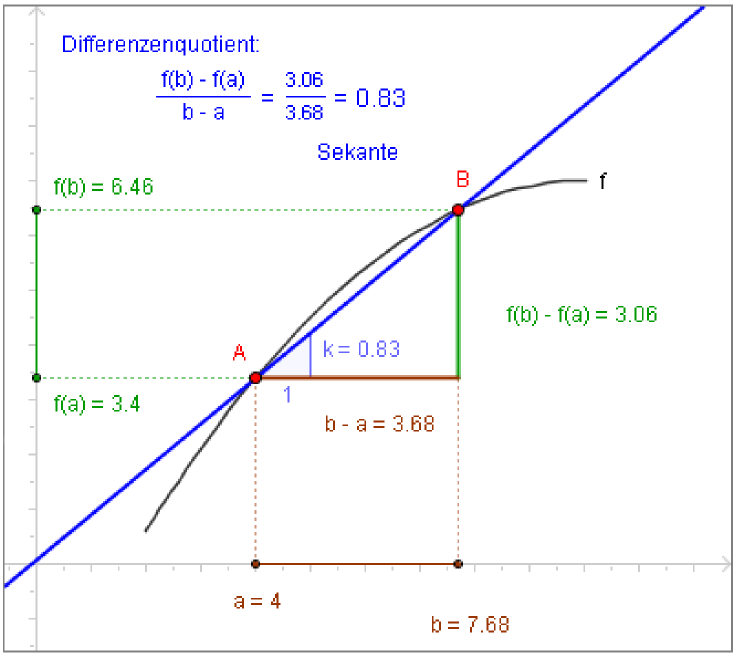


Damit sind also nicht nur die Kriterien der Interaktivitätsstufe IV erfüllt, sondern auch Möglichkeiten zum entdeckenden Lernen nach J.S. Bruner [Bru1] gegeben.

Die *nächste Stufe „Das Objekt bzw. den Inhalt der Repräsentation konstruieren“* wird erreicht, wenn der/die Benutzer/in im Lernprogramm Werkzeuge zur Verfügung hat, mit denen er/sie selbst Objekte kreieren, Ideen visualisieren oder Modell entwerfen kann [Schu3, S. 196]. Ein typisches Beispiel hierfür sind Geometrie-Programme wie etwa GeoGebra.

Die *letzte* und *sechste Stufe* der Interaktivität beschreibt Schulmeister als eine, bei der man „*Den Gegenstand bzw. Inhalt der Repräsentation konstruieren und durch manipulierende Handlungen intelligente Rückmeldungen vom System erhalten*“ [Schu3, S. 196]. Für die Mathematik könnte das beispielsweise durch folgende Multimedia-Objekte realisiert sein:

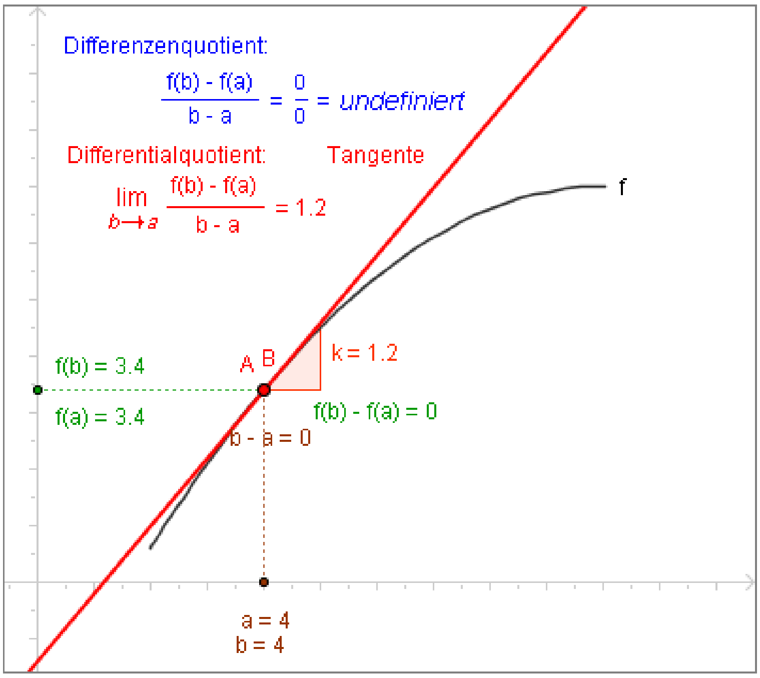
Beispiel 1: Schon zu Beginn dieses Abschnitts habe ich die Flash-Animation „Die Ableitung als Grenzwert“ der Interaktivitätsstufe I zugeordnet. Eine weitere Realisierung mit GeoGebra entspricht der Stufe VI.



Quelle (gültig am 25.02.2007):

http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/diff_einfuehrung/lernpfad/content/06_differentialquotient.htm

Das obige Bild zeigt die Ausgangssituation des Multimedia-Objekts. Die Lernenden können den Punkt B entlang der Funktion f zum Punkt A hin verschieben. Das Verschieben des Punktes B führt dazu, dass der Inhalt der Repräsentation (Sekante, Tangente) immer neu konstruiert und verändert wird. Der Differenzenquotient (Sekantenanstieg) wird stets mitberechnet. Sobald jedoch die beiden Punkte übereinander liegen, die Differenz b-a also gleich null ist, erhalten die Benutzer/innen folgende „intelligente Rückmeldung“:

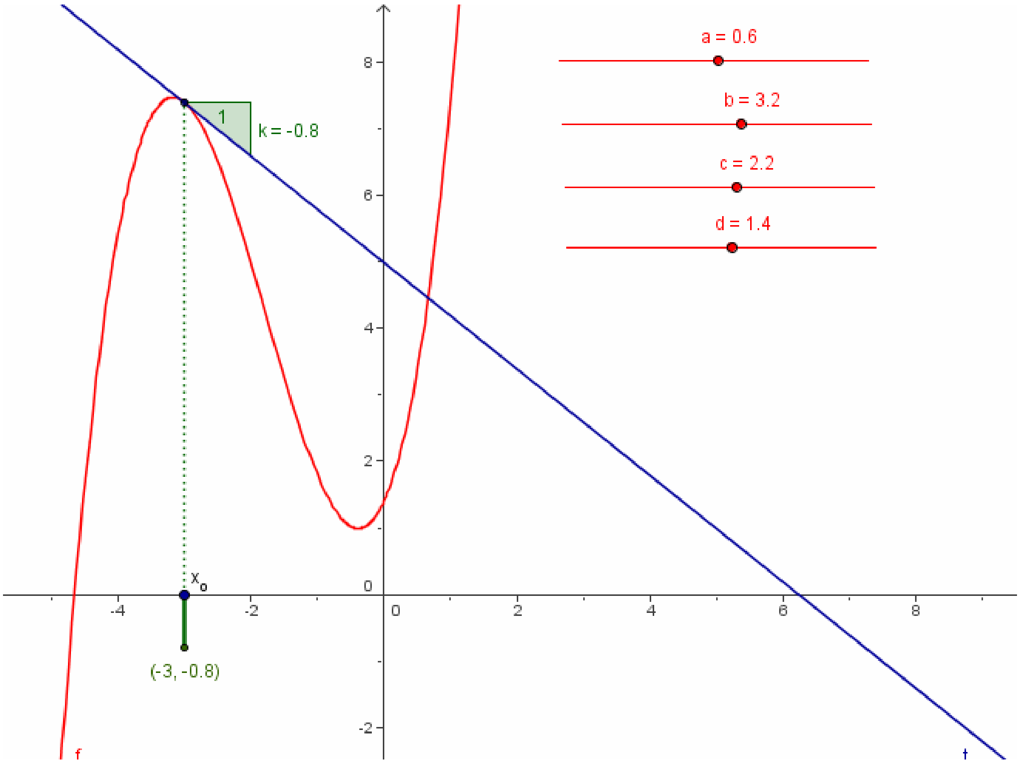


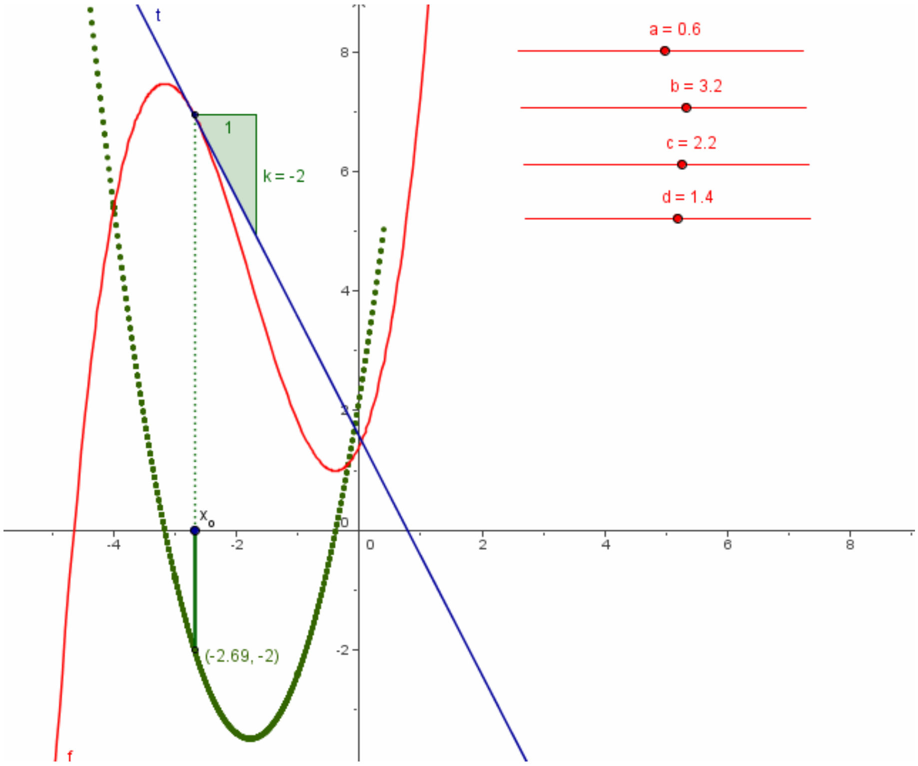
Quelle (gültig am 25.02.2007):

http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/diff_einfuehrung/lernpfad/content/06_differentialquotient.htm

Dieses multimediale Lernobjekt erlaubt gewissermaßen die Konstruktion einer Repräsentation und die manipulierende Handlung veranlasst das System zu einer intelligenten Rückmeldung. Selbstverständlich muss dieses Lernobjekt in einen sinnvoll gestalteten Lernprozess integriert werden.

Beispiel 2: Der erste hier eingefrorene Ausschnitt einer GeoGebra-Datei zeigt eine von den Lernenden selbst mittels Schieberegler konstruierte Funktion und die Tangente in einem ebenso von den Lernenden frei zu wählenden Punkt an die Funktion. Der Punkt x_0 kann nun entlang der x-Achse verschoben werden, was zur Folge hat, dass sich auch der Punkt (x_0, f(x_0)) auf der Funktion und damit die Tangente verändert. Mit der Verschiebung von x_0 entstehen gleichzeitig neue Tangenten und die Ableitungsfunktion, wie das zweite eingefrorene Bild ausschnittweise darstellt.


a = 0.6
b = 3.2
c = 2.2
d = 1.4
1
k = -0.8
(-3, -0.8)
x₀
f
t


a = 0.6
b = 3.2
c = 2.2
d = 1.4
1
k = -2
(-2.69, -2)
x₀
f
t

Hier wird also von den Lernenden der Gegenstand der Repräsentation (die Funktion f) selbst konstruiert. Aufgrund der Manipulation von x_0 erhalten die Benutzer/innen eine intelligente Rückmeldung (Tangenten, Ableitungsfunktion) vom System.

Erwähnenswert ist weiters noch, dass Schulmeister diese Stufe der Interaktivität scharf von sozialer Interaktion abgrenzt [Schu3, S. 196]. Für ihn bedeutet Interaktivität auf Stufe VI, „*dass dem Partner Computer oder Programm bedeutungstragende Objekte bzw. Aktionen geschickt werden, die das Programm versteht und auf die es mit entsprechenden Rückmeldungen antworten kann*“ [Schu3, S. 196], was aber nicht mit menschlicher Kommunikation oder eben sozialer Interaktion zu vergleichen ist.

Nach Rhodes und Azbel [Rho] lassen sich *drei Formen des Designs* von Interaktivität[38] in einer Lernumgebung unterscheiden. Die erste Form, genannt *Reaktives Design*, entspricht dem behavioristischen Reiz-Reaktions-Paradigma und weist eine sehr geringe Stufe der Interaktion auf, die Benutzer/innen haben nur limitierte Kontrolle über Inhalt und Struktur. Beim *Coaktiven Design* sind die Kontrollmöglichkeiten erweitert, der/die Benutzer/in kann entscheiden was oder wie etwas präsentiert wird, kann aber nicht gleichzeitig auf beides – das Was und Wie – Einfluss nehmen. Auf der dritten Stufe dieser Skala – dem *Proaktiven Design* – kommt den Lernenden eine aktiv konstruierende Rolle zu.

Beide hier skizzierte Skalen der Interaktivität lassen erkennen, dass mit den jeweils höheren Stufen der Interaktivität auch die Aktivität der Lernenden steigt. Die unteren Stufen der Interaktivität weisen eher behavioristischen Charakter auf, während höhere Interaktivitätsniveaus eher kognitive und konstruktivistische Lernparadigmen fördern.

5.5.1.3 Lerntheorien und digitale Lernangebote

Wie schon im vorhergehenden Abschnitt angedeutet wurde, können multimediale bzw. hypermediale Lernobjekte den klassischen Lerntheorien zugeordnet werden. Dabei weisen vollständige digitale Lernarrangements – so wie „herkömmlicher“ Unterricht auch – Merkmale verschiedener Lerntheorien auf.

[38] 1985 veröffentlichten sie eine entsprechende Skala, die eine der ersten allgemein akzeptierten Skalen ist.

Behavioristisch geprägte Computerlernprogramme präsentieren den Lehrgegenstand bzw. den Inhalt in elementaren, aufeinander aufbauenden Informationseinheiten, so genannten Lehrstoffatomen, die von den Lernenden sequenziell „konsumiert“ werden [Er, S. 25]. Den einzelnen Informationseinheiten folgen Fragen, bei deren richtiger Beantwortung die Lernenden bestärkt und im Lernprozess weitergeleitet werden. Falsche Antworten können eventuell ignoriert oder nochmals gestellt werden, gelegentlich kann auch ein Zurückspringen zur Informationseinheit erfolgen. Webbasierte Lernangebote behavioristischer Orientierung weisen einen linearen Aufbau der Seite auf und wollen ein Abschweifen vom Thema und damit ein eigenes Erkunden der Lernenden verhindern [Ly, S. 43 ff.].

Solche Computerlernprogramme widersprechen Heymanns Allgemeinbildungskonzept in vielen Punkten. Hans Werner Heymann hat 25 Merkmale einer „allgemeinbildenden Unterrichtskultur“ [Hey, S. 264 ff.] formuliert, davon möchte ich drei herausgreifen, an denen sich die Unvereinbarkeit mit obigen Modell zeigen lässt.

1. „Fehler werden zum Anlaß genommen, über Gründe für diesen Fehler nachzudenken“ [Hey, S. 264]:

Behavioristische Computerlernprogramme ignorieren Fehler oder springen zur entsprechenden Informationseinheit zurück, über Gründe für diese Fehler wird also nicht nachgedacht.

2. „Es gibt Raum für Umwege, ungewöhnliche Ideen, Offenheit für unterschiedliche Verläufe des Unterrichts“ [Hey, S. 264]:

Im Gegenzug dazu „erlauben“ behavioristische Computerlernprogramme kein Abschweifen vom Thema.

3. „Individuell unterschiedliche Lösungswege werden nicht nur akzeptiert, sondern als besondere Zugangsweisen begrüßt“ [Hey, S. 264]:

Auch hier verhalten sich behavioristische Computerlernprogramme genau gegenteilig, eigenes Erkunden der Lernenden und damit individuell unterschiedliche Lösungswege sollen verhindert werden.

Computerlernprogramme die von *kognitivistischen* Lerntheorien geprägt sind, bieten die Informationen bzw. den Inhalt den Lernenden in klar strukturierter Abfolge dar [Ly, S. 43 ff.]. Allerdings haben die Lernenden mehr als beim oben genannten Modell die Freiheit, eigene Lernwege einzuschlagen. Derartige webbasierte Unterrichtsangebote ermöglichen den Lernenden eigenes Erkunden und räumen dem individualisierten Lernen große Bedeutung ein. Ein wichtiges Merkmal kognitivistisch orientierter Computerlernprogramme ist auch die didaktische Vorsortierung der Inhalte [Er, S. 30].

Webbasierte Lernangebote, die *konstruktivistische* Konzepte verwirklichen, haben als Zielgruppe oft Personen, die schnell Informationen erhalten wollen und häufig eine höhere Bildung haben. Lineare Strukturen erscheinen verpönt und werden durch nichtlineare ersetzt, um den Lernenden ein hohes Maß an Selbstbestimmung (des Lernprozesses) zu ermöglichen. Zudem werden häufig qualitativ hochwertige Grafiken integriert [Er, S. 42]. In der Forschung haben sich bisher drei konkrete Konzepte für das Design (auch digitaler) konstruktivistischer Lernarrangements etabliert, die aber derzeit nur an äußerst wenigen Beispielen realisiert sind. Eines dieser Konzepte mit dem Namen „*Anchored Instruction*“ (verankerte Unterweisung) wurde von Wissenschaftlern aus Vanderbilt in enger Kooperation mit Praktikern in den 1990er Jahren entwickelt [Rei, S. 197]. Das Ziel dieses Modells besteht vor allem darin, die Anwendbarkeit von Wissen zu verbessern und „träges Wissen“, das durch lehrer/innenzentrierten Unterricht entsteht, zu vermeiden [Rei, S. 197]. Ermöglichen soll dies ein narrativer Anker, der einerseits die Verankerung der neuen Inhalte in das Vorwissen der Lernenden bewirkt und andererseits eine Verankerung in lebenspraktische Zusammenhänge ermöglicht. Erzählungen oder Beschreibungen von authentischen Situationen sind solche narrativen Anker und sollen die Schülerinnen und Schüler intrinsisch zum der Lösen des der Erzählung innewohnenden Problems motivieren. Nach diesem Modell wurde für den Schulbereich (etwa 5. Schulstufe) die „Jasper Woodbury-Serie“[39] entwickelt. Hierbei sehen die Schülerinnen und Schüler eine Art Video, das ein Abenteuer zeigt, welches Jasper erlebt. Informationen, die für die Bearbeitung und Lösung der Aufgaben benötigt werden, erhalten die Schülerinnen und Schüler im Verlauf der Darbietung. Gabi Reinmann sieht in diesem Modell Potential für Blended Learning[40], da inzwischen mit computerbasierten Formen narrative Anker besser und einfacher hergestellt werden können als dies zu

---

[39] Auf http://peabody.vanderbilt.edu/projects/funded/jasper/Jasperhome.html kann man sich einen Überblick über die Inhalte verschaffen. Gültig am: 01.01.2007

[40] Blended Learning kann als eine Form von E-Learning verstanden werden und meint die Kombination digitaler Medien mit dem Lernen in Präsenzsituationen, schließt damit aber auch die unterschiedlichen Unterrichtsmethoden mit ein [Rei, S. 103].

Beginn des Projekts der Fall war [Rei, S. 199]. Als praktische Folgerungen für Blended Learning leitet sie aus diesem Modell bzw. Konzept die Auswahl realitätsnaher (komplexer) Probleme sowie deren Darstellung mittels audiovisueller Medien ab. Ferner sollen nach Reinmann zu Problemen Aufgaben und Inhalte entwickelt und allesamt in zwei Geschichten, aus denen die Schüler/innen selbst eine auswählen können, eingebettet werden [Rei, S. 199]. Zu guter Letzt sollen die Lernenden angeleitet und bei Bedarf unterstützt werden, „in und mit der Geschichte durch Problemlösen in verschiedenen Kontexten zu lernen“ [Rei, S. 199].

Dass ein solches Modell Verstehensprozesse, Problemlösefähigkeiten und soziale Kompetenzen fördert [Rei, S. 199], mag richtig sein. Dass ein solches Modell aber per se neue Medien – abgesehen von der eventuell einfacheren und besseren Herstellung narrativer Anker – braucht oder sich damit deutlich besser umsetzen lässt, vermag ich nicht zu sehen. Viel eher scheint mir, dass „das Paradigma des Konstruktivismus das Lernen mit digitalen Medien teilweise als Vehikel genutzt hat, um alte und neue konstruktivistische Vorschläge für das Lernen und Lehren zu verbreiten“ [Rei, S. 191]. Ähnliche Kritikpunkte lassen sich meiner Ansicht nach auch für das nächste Konzept formulieren.

Das von Collins, Brown und Newman [Col] entwickelte „*Cognitive Apprenticeship-Modell*“ (kognitive Meisterlehre) geht auf Grundsätze der Lehrlingsausbildung zurück. Die Lernenden beobachten eine/n Experten/in beim Lösen einer Aufgabe oder eines Problems und lernen davon. Schritt für Schritt sollen die Lernenden dann selbst reale Probleme mit zunehmender Eigenständigkeit lösen und werden so in die Selbstständigkeit entlassen [Rei, S. 194]. Gabi Reinmann sieht dies auch als eine Einführung der Novizen/Novizinnen in die Experten/innenkultur [Rei, S. 195]. Die sieben charakteristischen Schritte dieses Modells können bei Astrid Ernst [Er, S. 43 f.] und ausführlicher bei Gabi Reinmann [Rei, S. 195] nachgelesen werden, auf eine detaillierte Darstellung möchte ich aufgrund oben genannter Kritik verzichten und noch einmal auf die bereits in Abschnitt 4.2.1 ausführlich aufgezeigte Gefahr, die Ebene der Abstraktion und symbolischen Repräsentation in mathematisch-naturwissenschaftlichen Lernsystemen zu vernachlässigen bzw. auszublenden, hinweisen.

Zum Abschluss dieser Ausführungen möchte ich noch in aller Kürze zwei weitere Modelle – „*Goal-Based Scenarios*“ und „*WebQuests*“ – vorstellen. Das Goal-Based Scenario-Modell wurde speziell für projektbasiertes Lernen mit digitalen Medien konzipiert und an einigen Beispielen, trotz hoher Kosten, erfolgreich umgesetzt [Rei, S. 204]. Roger G. Schank entwarf dieses Modell, das dem „learning by doing“ zentrale Bedeutung beimisst, 1994. Schank geht davon aus, dass Fertigkeiten und Kenntnisse gemeinsam und möglichst situiert anhand authentischer Problemstellungen, bei denen ein bestimmtes Ziel zu erreichen ist, erworben werden sollen [Rei, S. 203]. Das didaktische Modell des WebQuests wurde ebenso wie das Goal-Based Scenario für das Lernen mit dem Internet konzipiert. Die Idee des WebQuests geht auf den Amerikaner Bernie Dodge im Jahr 1997 zurück [Rei, S. 205]. Ein WebQuest zeichnet sich dadurch aus, dass alle gestellten Aufgabe vorrangig mit Quellen aus dem Internet zu bearbeiten sind, dabei sollen vor allem entdeckungsorientierte Aktivitäten bei den Lernenden gefördert werden [Rei, S. 206]. Erwähnenswert im Zusammenhang mit Webquests und dem Mathematikunterricht ist die Webseite von Christine Bescherer (http://christine.bescherer.de[41]) sowie ihre 2005 erschienene Publikation mit dem Titel „WebQuests als Lernumgebung für prozessbezogene Kompetenzen im Mathematikunterricht." [Be].

Zusammenfassend kann also gesagt werden,

(1) dass verschiedenste didaktische Modelle zur Gestaltung digitaler Lernangebote existieren und diese den unterschiedlichen Lerntheorien zugeordnet werden können,
(2) dass wenige dieser didaktischen Modelle speziell für das Lernen mit dem Internet konzipiert wurden,
(3) dass die Erstellung digitaler konstruktivistischer Lernangebote enorme Kosten verursacht und daher bis dato solche Lernarrangements selten umgesetzt wurden.

Ferner haben die obigen Ausführungen zum Einsatz des Internets im Mathematikunterricht gezeigt, dass Interaktivität auf verschiedenen Stufen realisierbar und für die Motivation der Lernenden bedeutend ist. Für den Mathematikunterricht gibt es derzeit schon zahlreiche auch interaktive Inhalte, die es in ein Lernarrangement einzubetten gilt. Genau dies wurde unter anderem mit den Lernpfaden aus dem Projekt „Medienvielfalt im Mathematikunterricht“ versucht und auch (teilweise) erreicht.

[41] Gültig am 31.12.2007

6. Projektbeschreibung – Medienvielfalt im Mathematikunterricht

In diesem Kapitel möchte ich die Entstehung des Projektes „Medienvielfalt im Mathematikunterricht“ aufzeigen sowie die vorrangigen Projektziele und deren Erreichung bzw. Nichterreichung anhand ausgewählter Beispiele erörtern. Ferner werde ich die Projektergebnisse und einen von mir erstellten Lernpfad vorstellen.

6.1 Projektentstehung

Im Schuljahr 2002/2003 erstellte und erprobte ich gemeinsam mit meinem Kollegen Wolfgang Zach vier Lernpfade zum Thema „Funktionen“ in einer 5. Klasse AHS. Mit diesen Lernpfaden waren wir Teil eines Projekts der „Naturwissenschaftswerkstatt“, das den Projekttitel „*mathe online* – Perspektiven für einen zeitgemäßen Mathematikunterricht“ trug. Die Initiative zu diesem Projekt ging von Franz Embacher aus, beteiligt waren auch die Kollegin Notburga Grosser sowie die Kollegen Wolfgang Wisenöcker und Wolfgang Kulha.

Die damals von uns erstellten Lernpfade geben den Lernenden einen Weg vor, bei dem die Nutzung hypertextbasierter Lernmaterialien große Bedeutung hat. Die Inhalte und Informationen werden in einer klar strukturierten Abfolge dargeboten, weisen eine lineare Struktur auf und gewähren den Lernenden aber dennoch ein hohes Maß an Selbstbestimmung des eigenen Lernprozesses.

Die mit diesen Lernpfaden erzielten Erfahrungen und Projektergebnisse waren überwiegend positiv, einige davon möchte ich hier exemplarisch wiedergeben [Em, S. 13 f.]:

Plakat zur Projektpräsentation

- Die Schülerinnen und Schüler konnten ihr eigenes Lerntempo wählen, was von vielen begrüßt, von manchen aber auch als Schwierigkeit empfunden wurde.

- Ein Hauptproblem der Schülerinnen und Schüler bestand darin, die eigenen Gedanken in strukturierter Form zu dokumentieren.
- Die Kommunikation der Schülerinnen und Schüler untereinander, das Reflektieren über mathematische Inhalte und die gegenseitigen Hilfestellungen waren wichtig für das Arbeiten mit den Lernpfaden.
- Die interaktiven Teile von ***mathe online*** wurden sehr positiv aufgenommen und als verständnisfördernd empfunden.

Im darauf folgenden Schuljahr versuchten wir mit dem Projekt „Lernpfade im Mathematikunterricht – Ansätze zu einer breiten Integration“ unsere Erfahrungen in Seminaren und Workshops an interessierte Kolleginnen und Kollegen weiterzugeben und ein Netzwerk dieser aufzubauen. Bei diesbezüglichen Disseminationstätigkeiten trafen wir auf viele Kolleginnen und Kollegen anderer Mathematik-Initiativen (ACDCA, GeoGebra, …) und schon bald war klar, dass Lernpfade doch eigentlich am besten mit schon etablierten Mathematik-Softwareprodukten kombiniert werden sollten. Erste informelle Treffen zur Abklärung von Kooperationsmöglichkeiten mit den oben genannten Initiativen fanden bereits im Jahr 2003 statt. Eine von MR Dr. Christian Dorninger initiierte Besprechung der österreichischen Mathematik-Initiativen im Jänner 2004 führte schließlich zu konkreten Ergebnissen, bereits im Mai 2004 wurde das gemeinsame Projekt „Medienvielfalt im Mathematikunterricht – Konzepte für eine ideale Medien-Kombination im Mathematikunterricht“ geplant und ein Projektantrag formuliert. Im November 2004 wurde das Projekt der Initiativen ACDCA, mathe online und GeoGebra von Dorninger genehmigt und mit einer finanziellen Unterstützung bedacht.

6.2 Projektziele

Eines der vorrangigen Projektziele war die Entwicklung, Erprobung und Evaluierung exemplarischer Lernpfade, die eine „ideale“ Medienkombination aufweisen sollten. Der Anspruch, in einigen Lernpfaden gleichzeitig hypertextbasierte Lernmaterialien mit CAS, DGS und eventuell auch einer Tabellenkalkulation zu kombinieren, konnte kaum realisiert werden. Dafür gibt es meines Erachtens zwei Gründe:

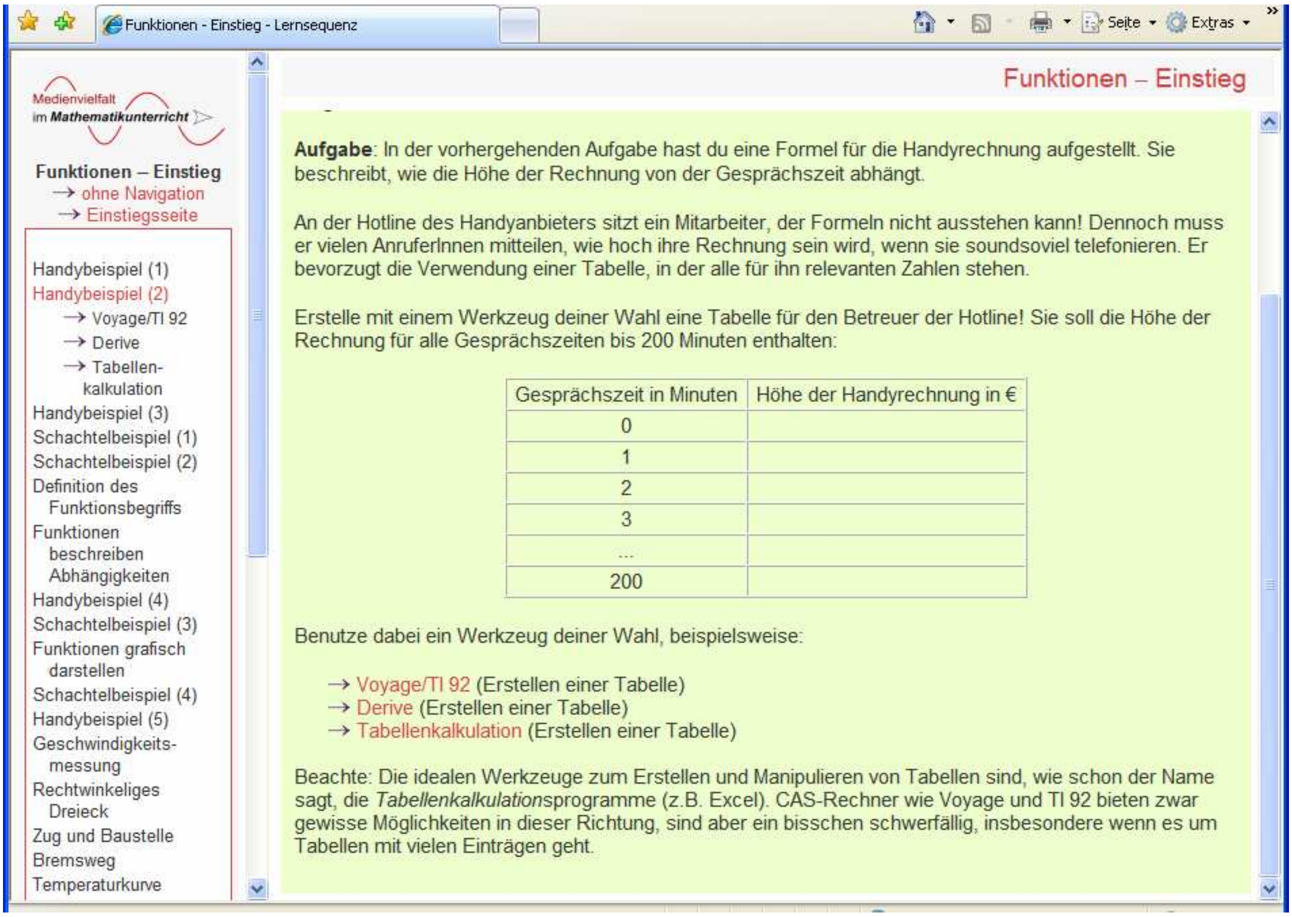
(1) Nicht jeder mathematische Inhalt ist für jede Technologie geeignet, bei manchen Inhalten drängt sich nur eine bestimmte Technologie förmlich auf!

(2) In den einzelnen Arbeitsgruppen zur Erstellung der Materialien wurde zwar versucht, jede Technologie durch eine Expertin/einen Experten zu vertreten, dies war jedoch nicht immer möglich. Vermutlich wurden deshalb einzelne eventuell mögliche Aspekte vernachlässigt.

Anhand der folgenden drei Beispiele möchte ich den ersten der oben angeführten Gründe illustrieren.

1. Beispiel: Lernpfad „Funktionen – Einstieg"[42]

Dieser Lernpfad ist in ein Hypertextsystem eingebettet, dient dem Einstieg zum Thema Funktionen in der 5. Klasse AHS und versucht gleichzeitig verschiedene Medien zu kombinieren.



Folgende Einsatz- bzw. Verwendungsmöglichkeiten von neuen Medien treten dabei auf:

a.) Flash-Animation zur Veranschaulichung,

[42] http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/funktionen/einstieg/content/lernsequenz.html (Gültig am: 05.04.2007)

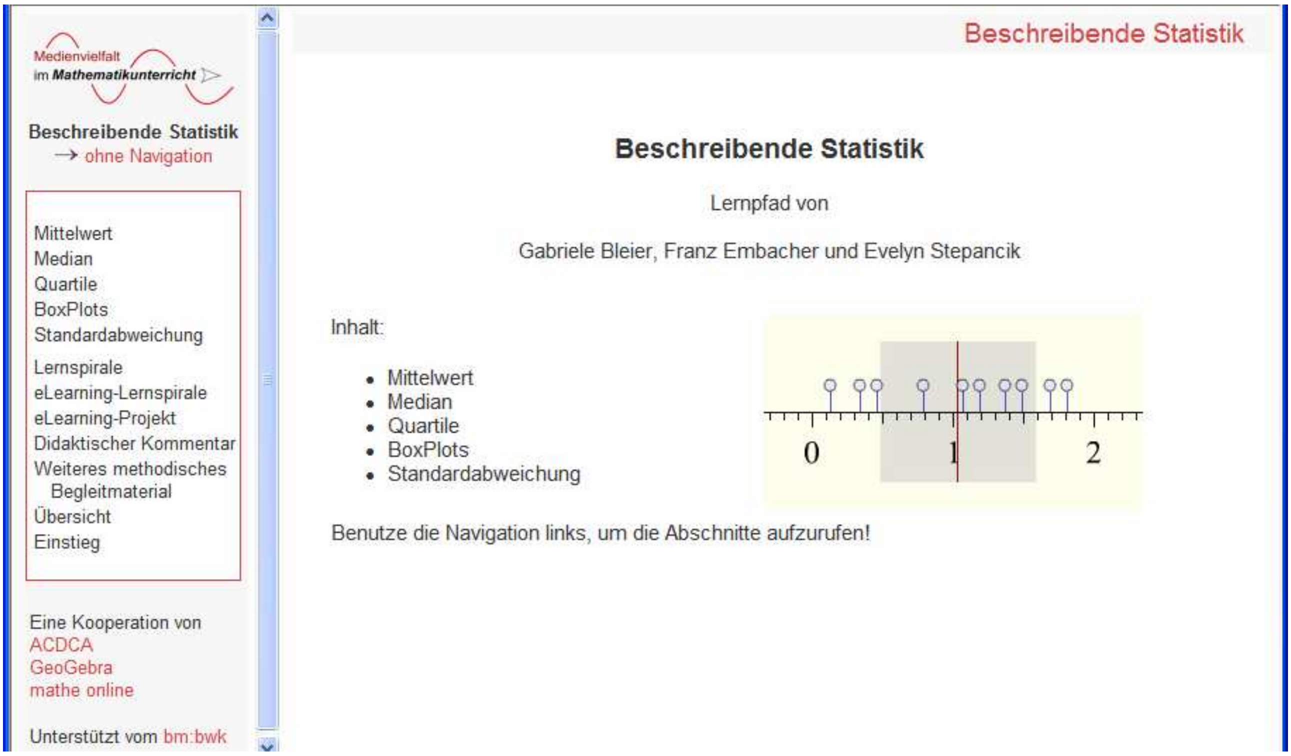
b.) Nutzung von CAS und Tabellenkalkulation zum Erstellen von Wertetabellen,
c.) Nutzung von CAS, Tabellenkalkulation, GeoGebra und Funktionsplottern zum Zeichnen von Funktionsgraphen,
d.) Applet zur funktionalen Abhängigkeit,
e.) interaktiver Test.

Wie aus Kapitel 5 bereits erkennbar wurde, scheint das Thema Funktionen prädestiniert für den Einsatz moderner Medien bzw. Technologien zu sein. Die Funktionsplotter (siehe Abschnitt 5.1) wurden, wie ja schon ihr Name deutlich macht, speziell für dieses mathematische Gebiet entwickelt. Vom CAS weiß man bzw. erhofft man, dass gerade im Bereich der Funktionen der unkomplizierte Wechsel der Darstellungsformen die Einsicht vertieft (siehe Abschnitt 5.2.1). Die Tabellenkalkulation (siehe Abschnitt 5.4) wurde bisher vorwiegend – wenn überhaupt – als ein weiterer Funktionsplotter genutzt und es ist wohl unbestreitbar, dass mithilfe einer Tabellenkalkulation auf einfachste Art und Weise Wertetabellen rasch – quasi auf Knopfdruck – erstellt werden können. Es ist also nicht weiter überraschend, dass in einem solchen Lernpfad die eben angeführten Applikationen zum Einsatz kommen und der gesamte Lernpfad mit den interaktiven Multimedia-Komponenten (Flash-Animation, Applet, interaktiver Test) eine gelungene Medienkombination aufweist.

2. Beispiel: Lernpfad „Beschreibende Statistik“[43]

Der Lernpfad „Beschreibende Statistik“ ist ebenfalls in ein Hypertextsystem eingebettet, wurde für die 4. Klasse AHS konzipiert und ermöglicht den Schülerinnen und Schülern die selbstständige Erarbeitung der für diese Schulstufe im Lehrplan festgelegten Inhalte, zum Beispiel: arithmetisches Mittel und seine Eigenschaften; Median und seine Eigenschaften; Quartile; Boxplot und Standardabweichung. Im Verlaufe dieses Lernpfads können die Erarbeitungs- und Übungsbeispiele (auch mit großen Datensätzen) mit verschiedenen Medien (Papier, CAS-Rechner, Excel) gelöst werden, Flashanimationen sollen zu einem tieferen Verständnis der oben angeführten Begriffe führen und Videos zeigen, wie statische Kennzahlen mit Excel ermittelt werden.

[43] http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/beschreibendeStatistik/index.html (Gültig am: 05.04.2007)



Bei diesem Lernpfad wurden also interaktive Multimedia-Komponenten (Flashanimationen, Video) mit Applikationen (CAS und Tabellenkalkulation), die Werkzeugcharakter aufweisen, kombiniert. Dass in diesem Lernpfad Dynamische Geometriesysteme nicht zum Einsatz kommen, liegt an den Inhalten der Beschreibenden Statistik. Keiner der oben erwähnten Begriffe lässt einen sinnvollen Einsatz von DGS zu, vielmehr scheinen die Inhalte der Beschreibenden Statistik für Tabellenkalkulation, allenfalls für ein CAS bzw. einen CAS-Rechner, prädestiniert zu sein.

3. Beispiel: Lernpfad „Einführung – Koordinatensystem und Geometrische Grundbegriffe“[44]

Schon der Titel dieses Lernpfads, der genau wie die vorhergehenden in ein Hypertextsystem eingebettet ist, legt nahe, dass ein Dynamisches Geometriesystem im Zentrum der Anwendungen steht. Mit diesem Lernpfad sollen geometrische Grundbegriffe in der 2. Klasse AHS eingeführt bzw. gefestigt werden, besonderes Augenmerk wird dabei auch auf die Beschreibung der Konstruktionsvorgänge gelegt.

[44] http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/geo_grundbegriffe/lernpfad/index.htm (Gültig am: 05.04.2007)


Lernpfad

Seite Extras

Einführung - Koordinatensystem und Geometrische Grundbegriffe

Übersicht
Reihenhaus
Roboter
Sahara
Winkel am Ziffernblatt
Olympische Ringe
Wunderblume
Rechteck und Quadrat
Uhrmacher
Kann ich das?
Bin ich ein Profi?

Übersicht

Hier wird kurz zusammengefasst, was dich auf deinem **LERNPARCOURS** erwartet.

Titel	Hinweis
LA: Kennenlernen von GeoGebra	*Lehrer-Input*
1. Reihenhaus	Dynamisches Arbeitsblatt
LB: Koordinatensystem	*Lehrer-Input*
LC: Direkte Eingabe und Bewegen von Objekten	*Lehrer-Input*
2. Roboter	Konstruktion mit GeoGebra: Arbeitsblatt
3. Sahara	Dynamisches Arbeitsblatt
4. Winkel am Ziffernblatt	Dynamisches Arbeitsblatt
5. Olympische Ringe	Konstruktion mit GeoGebra: Arbeitsblatt
6. Wunderblume	Konstruktion mit GeoGebra: Arbeitsblatt
7. Rechteck und Quadrat	Konstruktion mit GeoGebra: Arbeitsblatt
8. Uhrmacher	Konstruktion mit GeoGebra: Arbeitsblatt
9. Kann ich das?	Konstruktion mit GeoGebra
10. Bin ich ein Profi?	Konstruktion mit GeoGebra

In diesem Lernpfad wird unter anderem an bzw. mit Punkten, Strecken, Kreisen, Quadraten, Rechtecken, Winkeln gearbeitet und Konstruktionsprotokolle werden erstellt. Keine andere als eine Dynamische Geometriesoftware ermöglicht ein sinnvolles Arbeiten mit diesen geometrischen Objekten auf dem Niveau dieser Jahrgangsstufe.

6.3 Projektdurchführung

Während der Projektphase wurden 14 Lernpfade für verschiedene Schulstufen der Sekundarstufe I und Sekundarstufe II entwickelt. Erprobt wurden diese Materialien von rund 1500 Schülerinnen und Schülern aus 88 österreichischen Klassen, die von 74 verschiedenen Lehrer/innen betreut wurden.

Titel des Lernpfads **Ersteller/innen**	**Anzahl der Schüler/innen, die den Lernpfad evaluiert haben**
4. Koordinatensystem und geometrische Grundbegriffe Anita Dorfmayr, Walter Klinger	198
5. Kongruenz – vermuten, erklären, begründen Anita Dorfmayr, Walter Klinger	15
6. Dreiecke – Merkwürdige Punkte Edeltraud Schwaiger, Hildegard Urban-Woldron	63
7. Pythagoras (3. Klasse) Evelyn Stepancik	242
8. Pythagoras im Raum (4. Klasse) Anita Dorfmayr	66
9. Zylinder – Kegel – Kugel Evelyn Stepancik	6
10. Beschreibende Statistik (4. Klasse) Gabriele Bleier, Franz Embacher, Evelyn Stepancik	199
11. Funktionen – Einstieg Irma Bierbaumer, Franz Embacher, Helmut Heugl	281
9. Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1 Andreas Lindner, Markus Hohenwarter, Thomas Himmelbauer, Anita Dorfmayr	104
10. Vektorrechnung in der Ebene, Teil 2 Andreas Lindner, Markus Hohenwarter, Thomas Himmelbauer, Anita Dorfmayr	56
11. Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung Gabriele Jauck, Gabriele Bleier, Markus Hohenwarter	59
12. Einführung in die Differentialrechnung Markus Hohenwarter, Gabriele Jauck	201
13. Einführung in die Integralrechnung Markus Hohenwarter, Gabriele Jauck, Andreas Lindner	25
14. RSA-Algorithmus: Asymmetrische Verschlüsselung Walter Wegscheider, Petra Oberhuemer, Franz Embacher	23

Zu jedem dieser Lernpfade erstellten die Autorinnen und Autoren einen didaktischen Kommentar, der die wichtigsten Informationen (inhaltliche Voraussetzungen, technologische Voraussetzungen, Lernziele, …) kurz zusammengefasst für die Anwender/innen präsentiert. Für manche Lernpfade wurde zusätzliches methodisches Begleitmaterial entworfen, das es den Lehrenden ermöglicht, ihren Unterricht mit diesem Lernpfad abwechslungsreicher zu gestalten.

Für die Evaluation der Lernpfade stellte der Vorarlberger Bildungsserver (VOBS) dem Projektteam kostenlos einen eigenen ILIAS-Mandanten zur Verfügung. Das Learning Content Management System (LCMS) ILIAS enthält ein leistungsstarkes Test- und Umfragetool, mit dem ein Fragenpool angelegt werden kann, das die Realisierung der gängigen Fragetypen (Single Choice-/Multiple Choice-Fragen, Fragen mit Ordinalskala, Fragen mit metrischer Skala, offene Textfragen, …) erlaubt. Die eingegebenen Einzelfragen können in ILIAS beliebig zu einer Umfrage kombiniert werden und das System ermöglicht eine Navigation innerhalb des Fragebogens. So können beispielsweise an Ja/Nein-Fragen, abhängig von der getroffenen Auswahl, weitere und unterschiedliche Fragen gestellt werden.

Zur Durchführung der Evaluation wurde eine geschlossene Lerngruppe am ILIAS-Mandanten angelegt, für die alle Teilnehmer/innen nach einer ausführlichen Testphase einen Account erhielten. Die Lehrer/innen wurden mittels eines Begleitschreibens über den Ablauf der Evaluation und die Handhabung des Systems informiert.

Nach Abschluss der Umfrage wurde der ILIAS-Mandant stillgelegt, die Daten in Excel und SPSS zur Weiterverarbeitung exportiert.

6.3.1 Lernpfad – Versuch einer Begriffsklärung

Die Begriffsklärung, was ein Lernpfad sein könnte, ist derzeit noch nicht abgeschlossen, dennoch gibt es einige wenige Versuche einer Definition. Zum Beispiel: Ein Lernpfad ist „ein für den Lerner vorgesehener oder vom Lerner selbst generierter Weg bei der Nutzung von hypertextbasierten Lernmaterialien. Der Lernpfad wird einerseits durch die angebotene Reihenfolge von Lehr-/Lernmodulen oder Lehr-/Lerneinheiten bestimmt, andererseits wird er aktiv vom Lerner – geleitet durch ein bestimmtes Informationsbedürfnis – beschritten“[45].

Der von mir erstellte und oben zitierte Lernpfad bietet die Informationen bzw. den Inhalt den Lernenden in klar strukturierter Abfolge dar und ist somit – wie viele andere Lernpfade auch – von kognitivistischen Lerntheorien geprägt. Dabei haben die Lernenden die Freiheit, eigene Lernwege einzuschlagen. Ein solches webbasiertes Unterrichtsangebot ermöglicht den Lernenden eigenes Erkunden und räumt dem individualisierten Lernen große Bedeutung ein. Ein wichtiges Merkmal kognitivistisch orientierter (webbasierter) Unterrichtsangebote ist auch die didaktische Vorsortierung der Inhalte [Er, S. 30], die auch bei dem von mir erstelltem Lernpfad gegeben ist.

Lernpfade unterscheiden sich klar von behavioristisch geprägten Computerlernprogrammen oder Unterrichtsangeboten, da diese den Lehrgegenstand bzw. den Inhalt in elementare, aufeinander aufbauende Informationseinheiten, so genannte Lehrstoffatome, unterteilen, die von den Lernenden sequenziell „konsumiert“ werden müssen [Er, S. 25]. Ein Lernpfad dagegen soll aber nicht zur bloßen Konsumation der Inhalte, sondern zur aktiven Auseinandersetzung mit den präsentierten Informationen und Inhalten in Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit anregen.

Lernpfade unterscheiden sich aber meist auch sehr klar von konstruktivistisch geprägten (webbasierten) Lernangeboten, da letztere keine linearen Strukturen aufweisen und den Lernenden ein überaus hohes Maß an Selbstbestimmung (des Lernprozesses) gewähren.

6.3.2 Der Lernpfad „Satz von Pythagoras“

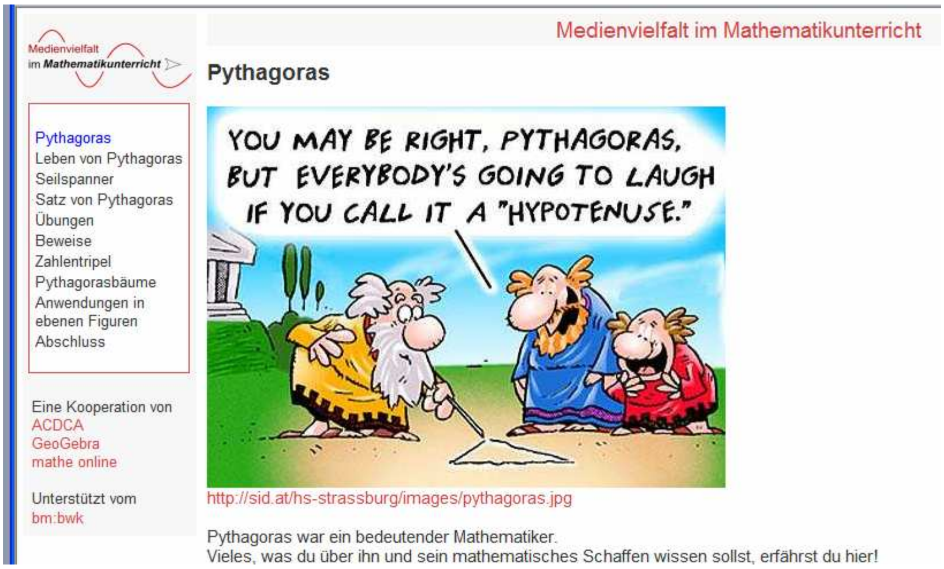
Da eine Beschreibung aller vierzehn Lernpfade den Rahmen dieser Arbeit bei weitem sprengen würde, habe ich mich entschieden nur einen, nämlich den zum Satz von Pythagoras (3. Klasse AHS), zu beschreiben, den ich im Schuljahr 2003/2004 erstellt habe. Damals war der Lernpfad so angelegt, dass meine Klasse ihn in Kombination mit einer Lernplattform bearbeiten konnte. Manche Aufgabenstellungen waren also direkt für die damals an unserer Schule verwendete Lernplattform Blackboard konzipiert, kön-

[45] https://bildungsportal.sachsen.de/e140/index_ger.html (gültig am 02.01.2007)

nen heute aber in ähnlicher Form mit beliebigen Plattformen realisiert werden. Für das Projekt „Medienvielfalt im Mathematikunterricht“ wurde dieser Lernpfad von mir im Schuljahr 2005/2006 adaptiert. Die Änderungen betrafen vorwiegend das Layout, eine inhaltliche Umgestaltung wurde nicht durchgeführt.

Obwohl es zum Thema „Satz des Pythagoras“ viele ausgezeichnete interaktive Übungen gibt, war es mir ein Anliegen, diese vorhandenen Lernhilfen in einen für meinen Unterricht entsprechenden Kontext, also auch in einen allgemein bildenden Zusammenhang, zu stellen. Darüber hinaus war es mir wichtig, die neuen digitalen Medien mit den herkömmlichen Medien zu kombinieren und einen möglichst „guten“ Mix zu finden.

Der Lernpfad gliedert sich in die drei Abschnitte „Einstieg – neues Wissen – Herausforderungen“, die aber äußerlich nicht als solche gekennzeichnet sind.



Im *ersten Teil* des Lernpfads werden die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, sich mit dem Leben und Schaffen von Pythagoras zu beschäftigen. Dabei sollten sie vor allem die folgenden Fragen mithilfe von Recherchen im Internet klären:

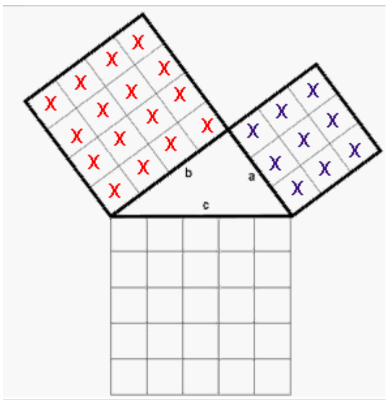
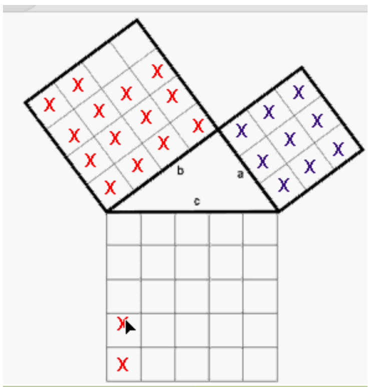
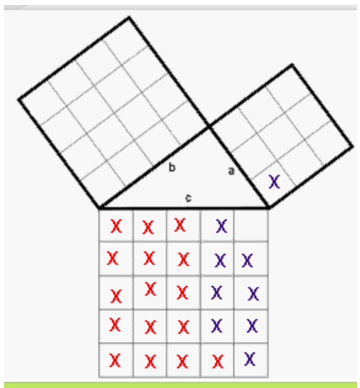
- Wann lebte Pythagoras?
- Wo lebte er? Wie sieht es heute dort aus? (Bilder, ...)
- Wie hat Pythagoras sein Wissen und seine Lehre verbreitet?
- Wie ist er mit seinen Schülern umgegangen?
- Hatte er auch Schülerinnen?

Die Ergebnisse der Internetrecherche werden mittels selbst erstellter Präsentationen festgehalten und der Klasse eventuell über eine Lernplattform zur Diskussion zur Verfügung gestellt. Im Anschluss an diese erste Aufgabe absolvieren die Schülerinnen und Schüler ein kurzes Quiz zum Leben von Pythagoras, um selbst überprüfen zu können, ob sie das Wichtigste dazu herausgefunden haben. Nach diesem Quiz haben die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, sich in einem Rollenchat (Rollenspiel mittels Computer) nochmals kreativ mit dem Leben und Schaffen von Pythagoras auseinanderzusetzen. Die Schülerinnen und Schüler sollten darstellen, wie ein Mädchen versucht in die Gruppe der Pythagoräer aufgenommen zu werden.

Der *zweite Teil* des Lernpfads dient dem Erwerb und der Anwendung des neuen Wissens. Dabei wurde ein historischer Zugang über das so genannte Seilspanner-Problem gewählt, welches die Schülerinnen und Schüler nicht nur am Computer (digital) erleben, sondern auch selbst mit einem entsprechend vorbereiteten Seil nachvollziehen sollten. Das durch das Seilspanner-Problem entstandene Dreieck wird danach von den Schülerinnen und Schülern herkömmlich (im Heft) und digital (mit GeoGebra[46]) konstruiert.

In weiterer Folge erarbeiten die Schülerinnen und Schüler in Partnerarbeit den Satz von Pythagoras. Dafür stehen ihnen einerseits ein Video, andererseits einige Handlungsanweisungen zur Verfügung. Die Schülerinnen und Schüler werden dazu angehalten, den Sachverhalt – dargestellt durch das Video – mit Variablen zu beschreiben.

Eingefrorene Bilder, die Ausschnitte des Videos zeigen:

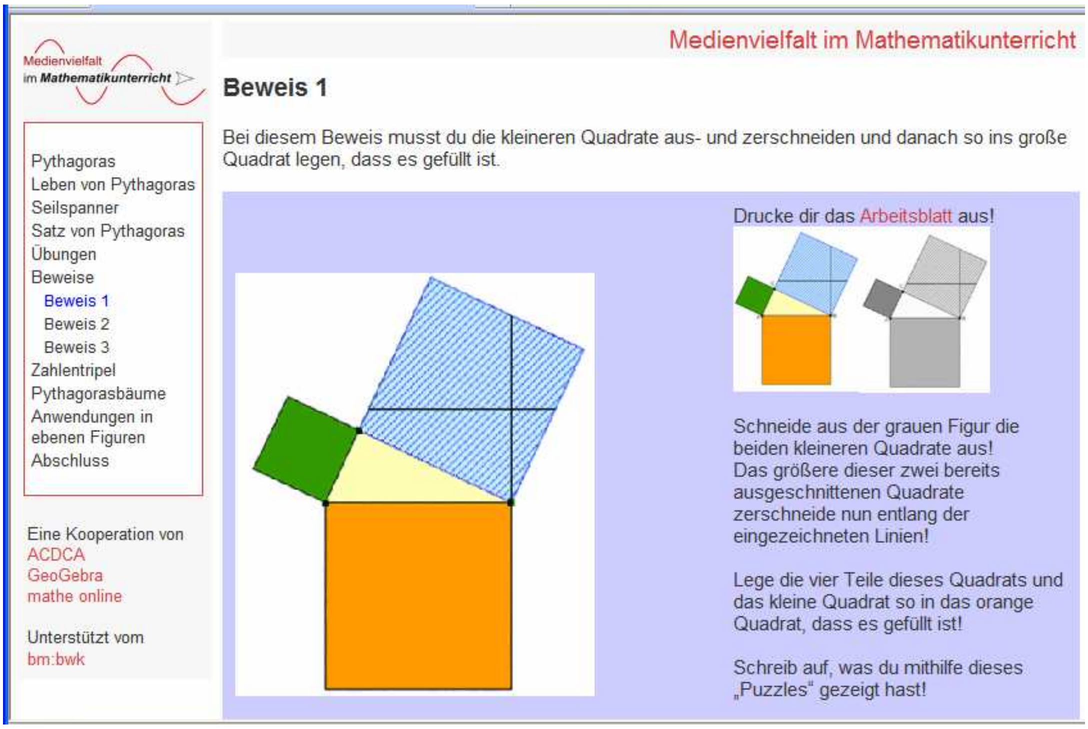
Nach dieser Partnerarbeit erhalten die Schülerinnen und Schüler zur Kontrolle ihrer aufgezeichneten Beobachtungen die Lösung. Nun hält der Lernpfad einfache Übungs-

[46] Dazu gibt es im Lernpfad eine vorbereitete GeoGebra-Datei.

aufgaben zur ersten Festigung des neuen Wissens sowie einen kurzen Hinweis auf das benötigte Rechnen mit Wurzeln bereit. In dieser Phase obliegt es den Lehrerinnen und Lehrern, ob sie das neu erworbene Wissen nun mit den Schülerinnen und Schülern zusammenfassen, besprechen bzw. diskutieren wollen oder die Schülerinnen und Schüler weiterhin ihrem eigenen Lernprozess überlassen und diesen dann aber möglichst gut beobachten, um dort Hilfe zu geben, wo es nötig scheint.

Die lineare Abfolge des Lernpfades sieht im *nächsten Schritt* die Auseinandersetzung mit drei verschiedenen Beweisen des Satzes von Pythagoras vor. Auch hier wurden wieder digitale Medien mit Papier, Heft, Schere, usw. kombiniert. Zum Satz von Pythagoras gibt es insgesamt 19 verschiedene Applets auf der Website http://www.ies.co.jp/math/java/geo/pythagoras.html[47], bei einigen davon handelt es sich um Zerlegungsbeweise.

Das folgende Bild zeigt einen Ausschnitt der ersten Aufgabe zum Beweisen des Satzes.

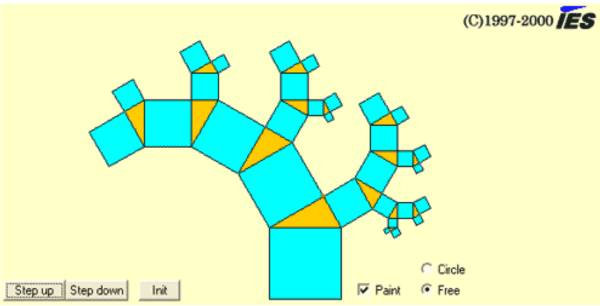


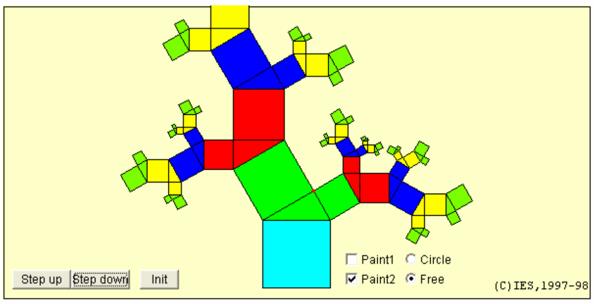
Die Schülerinnen und Schüler sollen einerseits den Beweis interaktiv mithilfe des Applets nachvollziehen und ihn andererseits selbst mit Schere und vorbereiteten Arbeitsblättern nachlegen. Des Weiteren werden die Schülerinnen und Schüler angehal-

[47] Gültig am 20.10.2007

ten, den Prozess mit eigenen Worten und wenn möglich auch mit Variablen schriftlich festzuhalten. Die beiden anderen Beweise und der Umgang mit ihnen sind ähnlich aufgebaut bzw. konzipiert.

Im äußeren Aufbau folgen nun die Beschäftigung mit Zahlentripel und Pythagorasbäumen, wobei diese Aufgaben jedoch dem *dritten Bereich* des Lernpfades nämlich dem Bereich der Herausforderungen zuzuordnen sind und den Schülerinnen bzw. Schülern oft als Wahlaufgaben zur Verfügung gestellt werden. Bei den pythagoreischen Zahlentripeln stehen nicht die Formeln im Vordergrund, sondern das spielerische Entdecken einiger solcher Zahlentripel. Das Arbeiten mit den Pythagorasbäumen beinhaltet wieder eine Kombination der unterschiedlichen Medien, einerseits kann das Entstehen der Bäume mittels zweier Applets beobachtet werden, andererseits sollen die Bäume von den Schülerinnen und Schülern händisch (oder eventuell mit einer Dynamischen Geometriesoftware) erstellt werden. Die beiden Bilder zeigen wiederum nur einen Ausschnitt der Möglichkeiten mit diesen Applets.





Inhaltlich hält der Lernpfad nun *noch weitere Anwendungen* des Satzes in *ebenen Figuren* bereit und verweist auf weitere Aufgabenstellungen in den jeweiligen Schulbüchern. Zum Abschluss sollen die Schülerinnen und Schüler Merkblätter zum Satz des Pythagoras und seinen Anwendungen erstellen, eigene Aufgabenstellungen in Partnerarbeit entwickeln und diese samt Lösungsweg über eine Lernplattform der Klasse vorstellen.

Die folgende Tabelle versucht übersichtlich darzustellen, mit welchen Lehrinhalten dieses Lernpfads Lernziele aus dem derzeit gültigen Lehrplan erreicht werden können.

Lehrinhalt	**Lernziel**
Geschichte und Leben von Pythagoras	Persönlichkeiten der Mathematikgeschichte kennen lernen
Herleitung des Satzes von Pythagoras	Geometrische Darstellungen deuten können, Vermutungen anstellen und formulieren können
Beweise für den Satz des Pythagoras	eine Begründung für den Lehrsatz des Pythagoras verstehen können, geometrische Darstellungen interpretieren können
Anwendungen in einfachen Aufgabenstellungen	den Lehrsatz des Pythagoras für Berechnungen in ebenen Figuren nutzen können, Variablen als Mittel zum Beschreiben von Sachverhalten und zum Lösen von Problemen verwenden können
Pythagoreische Tripel und Pythagorasbäume	Definitionen und Konstruktionsanleitungen verstehen und damit arbeiten können

Für Lehrerinnen und Lehrer gibt es auf der Website des Projekts Vorschläge für mögliche Formen der Unterrichtsorganisation sowie Hinweise und Tipps zum Arbeiten mit dem Material.

7. Evaluation

Die technischen Rahmenbedingungen für die durchgeführte Online-Evaluation habe ich bereits im Kapitel 6 skizziert und konzentriere mich daher jetzt ganz auf die Fragebögen und deren inhaltliche Auswertung. Bei der Erstellung der Fragebögen war mir das Rekurrieren auf die in den vorhergehenden Abschnitten ausgeführten didaktischen Überlegungen besonders wichtig und ich legte den Fokus auf drei Bereiche. Zum einen sollten natürlich Informationen rund um die Usability des erstellten Materials erhoben werden, zum anderen war es mir ein großes Anliegen, herauszufinden, ob die Lernpfade und diese Form des Unterrichts einen Beitrag zu Allgemeinbildung leisten können und ob sie auch für das Verstehen von Mathematik förderlich sind. Dementsprechend erstellte ich einen Fragebogen für die Lernenden und Lehrenden, die inhaltlich in vielen Bereichen identisch sind, aber hinsichtlich der Formulierungen an die jeweilige Zielgruppe angepasst wurden. Auf Testverfahren zur Messung fachlicher Leistung, in die auch Vergleichsklassen eingebunden werden, habe ich aus zweierlei Gründen verzichtet:

1. Die Aussagekraft solcher Testverfahren in Klassen mit und ohne Computereinsatz wird häufig kritisch hinterfragt. Die einen sehen den Nutzen von Computertechnologien erst dann gegeben, wenn die Lernenden in Testverfahren besser abschneiden als Vergleichsklassen. Die anderen betonen, dass es unrealistisch sei, vom Computereinsatz eine Wirkung auf herkömmliche Leistungserhebungsverfahren zu erwarten. Letztere tendieren dazu, Leistungen von Schülerinnen und Schülern, die durch den Computereinsatz nicht schlechter werden, eher positiv zu bewerten, da sie davon ausgehen, dass die Lernenden durch den Computereinsatz auch andere (wichtige) Fertigkeiten erwerben [Häu, S. 54 f.].

2. Der Vergleich von Schüler/innen- und Lehrer/innenergebnissen hingegen erschien mir besonders interessant, da in den CAS-Projekten von ACDCA die Ergebnisse der Lehrer/innenbefragung in manchen Bereichen stark von den Ergebnissen der Schüler/innenbefragung abweichen. Dabei nahmen die Schüler/innen eine wesentlich kritischere Sicht als die Lehrer/innen ein. Günther Grogger, der im Auftrag des Zentrums für Schulentwicklung, ein solches CAS-Projekte im Jahr 1998 evaluierte, meinte, dass derartige Befunde bei pädagogischen Innovationen immer wieder auftreten

und „*die Proponenten einer derartigen Neuerung oftmals eine wesentlich positivere Einschätzung, als der Realität zu entsprechen scheint, zeigen.*“ [Gro, S. 35].

In den folgenden Kapiteln werde ich nun die Ergebnisse dieser Evaluation vorstellen, interpretieren und deren Bedeutung im Zusammenhang mit meiner Forschungsfrage aufzeigen.

7.1 Fragebogen für Schüler/innen

Der Fragebogen der Schüler/innen (siehe Anhang) umfasst 26 Fragen und zwei abschließende offene Kommentarmöglichkeiten zum Lernpfad. Die Fragen sind zum Teil vierstufig, zum Teil aber auch fünfstufig. Mit den vierstufigen Fragen wollte ich erreichen, dass die Schüler/innen sich gelegentlich deutlich für eine positive oder negative Aussage entscheiden müssen, bei den fünfstufigen Fragen wollte ich den Schüler/innen auch eine mittlere Bewertung ermöglichen. Insgesamt weist der Fragebogen zwei Abschnitte auf. Im ersten Abschnitt werden allgemeine Informationen zum Mathematikunterricht und die eigene Einschätzung der Technologiekompetenz erhoben. Der zweite Abschnitt ist dem Lernpfad selbst gewidmet und erhebt:

1. die Usability des Lernpfads,
2. den Beitrag des Lernpfads zum Verstehen sowie
3. den Beitrag des Lernpfads zu einem allgemein bildenden Mathematikunterricht.

Jene Fragen, die den Beitrag der Lernpfade zu einem allgemein bildenden Mathematikunterricht im Fokus haben, basieren auf Hans Werner Heymanns Allgemeinbildungskonzept, insbesondere auf der von ihm formulierten Idee, dass nicht die mathematischen Inhalte allein, sondern vor allem auch die Unterrichtskultur sowie die Art und Weise wie Lehrer/innen und Schüler/innen im Unterricht mit den Inhalten und miteinander umgehen, entscheidend zur Allgemeinbildung im schulischen Mathematikunterricht beitragen [Hey, S. 262].

Heymann hat insgesamt 25 Merkmale einer „allgemeinbildenden Unterrichtskultur“ den Merkmalen der „herkömmlichen Unterrichtskultur“ des Mathematikunterrichts tabellarisch gegenübergestellt [Hey, S.264 ff.]. Davon habe ich folgende für den Fragebogen aufgegriffen[48]:

Merkmale einer „allgemein bildenden Unterrichtskultur“ des Mathematikunterrichts	**Lv**	**kK**	**Wo**	**kV**	**Vb**	**VK**	**SI**	**Merkmale der „herkömmlichen Unterrichtskultur“ des Mathematikunterrichts**
Schüler kommunizieren direkt miteinander	□				□	■		Schüler kommunizieren vorwiegend mit dem Lehrer bzw. über den Lehrer miteinander
Das Verstehen mathematischer Sachverhalte wird ihrer technischen Beherrschung übergeordnet; es zeigt sich für den Lehrer nicht zuletzt daran, wieweit Schüler über das reflektieren können, was sie mathematisch tun	□			■	□	■	■	Das Beherrschen eines mathematischen Gebiets wird durch den Lehrer über das Einfordern korrekter Lösungen zu vorgegebenen Aufgaben kontrolliert
Es gibt verschiedene Stufen der Annäherung an Erkenntnis, Hypothesen, Teillösungen usw.	■		□	■			□	Es gibt nur richtige und falsche Antworten.
Es gibt Raum für Umwege, ungewöhnliche Ideen, Offenheit für unterschiedliche Verläufe des Unterrichts				■		□	■	Schülergedanken, die aus Sicht des Lehrers vom offiziellen Thema wegführen, werden nicht weitergeführt

[48] Legende: Lv: Lebensvorbereitung im engeren Sinn; kK: Stiftung kultureller Kohärenz, einschließlich Orientierung an zentralen Ideen; Wo: Weltorientierung, einschließlich Anwendungsbezug; kV: Anleitung zum Denken, Verstehen und kritischen Vernunftgebrauch; Vb: Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft; VK: Einübung in Verständigung und Kooperation; SI: Stärkung des Schüler-Ich. Das Symbol □ zeigt eine partielle, das Symbol ■ eine hohe Relevanz für die betreffende Allgemeinbildungsaufgabe an.

	Lv	kK	Wo	kV	Vb	VK	SI	
Individuell unterschiedliche Lösungswege werden nicht nur akzeptiert, sondern als besondere Zugangsweisen begrüßt				□	□		■	Es gibt immer nur einen zugelassenen Lösungsweg
Mathematiklernen wird häufig als ein Erkundungsprozeß erfahren, der allein oder gemeinsam mit anderen in intensivem Austausch von Ideen und Argumenten vollzogen werden kann			□			■	■	Mathematiklernen wird von den Schülern als das Nachvollziehen vom Lehrer vorgegebener Wege erlebt
Schüler erproben auf spielerische Weise in mathematikhaltigen Situationen ihre Phantasie und Kreativität				■			■	Die Beschäftigung mit Mathematik wird überwiegend als anstrengend, knochentrocken, ernst, phantasietötend erlebt
Im Unterricht sind Neugier, Spannung, Engagement, Überraschung, Lust am Denken und mathematischen Tun nichts Ungewöhnliches				■			■	Der Unterricht verläuft in vorhersehbaren Bahnen, emotionale Betroffenheit durch die anstehenden Themen ist kaum auszumachen
Sinn und Bedeutung der jeweils anstehenden Mathematik werden thematisiert		■	■	■			□	Fragen nach Sinn und Bedeutung der Mathematik sind nicht Gegen stand des Mathematikunterrichts
Vernetzungen zwischen mathematischen Teilgebieten werden herausgearbeitet, der Bezug zu zentralen Ideen wird verdeutlicht		■	□	■				Jedes mathematische Teilgebiet steht im wesentlichen isoliert für sich

	Lv	kK	Wo	kV	Vb	VK	SI	
Die Schüler übernehmen Verantwortung für ihren eigenen Lernprozeß	■				■		■	Verantwortlich für das Lernen der Schüler ist der Lehrer
Es ist selbstverständlich Mitschülern beim Verstehen zu helfen und sich selbst, wenn nötig, helfen zu lassen				□	■	■		Der Mitschüler wird im wesentlichen als Konkurrent betrachtet
Es gibt immer wieder Gelegenheit, gemeinsam mit anderen an Probleme heranzugehen, sich über Ziele und Strategien zu verständigen, wechselseitig Schwächen auszugleichen und Stärken zu bündeln (Partner- und Gruppenarbeit)	■			□	□	■		Jeder Schüler erlebt sich als Einzelkämpfer, „Kooperation“ findet lediglich auf der informellen Ebene des Unterrichts statt (Mogeln)

7.2 Ergebnisse des Fragebogens für Schüler/innen

An der Online-Umfrage nahmen 1538 Schüler/innen teil, davon waren 747 (= 48,6%) weiblich und 791 (= 51,4%) männlich. 47% der Schüler/innen kamen aus Unterstufe und 53% der Schüler/innen aus der Oberstufe.

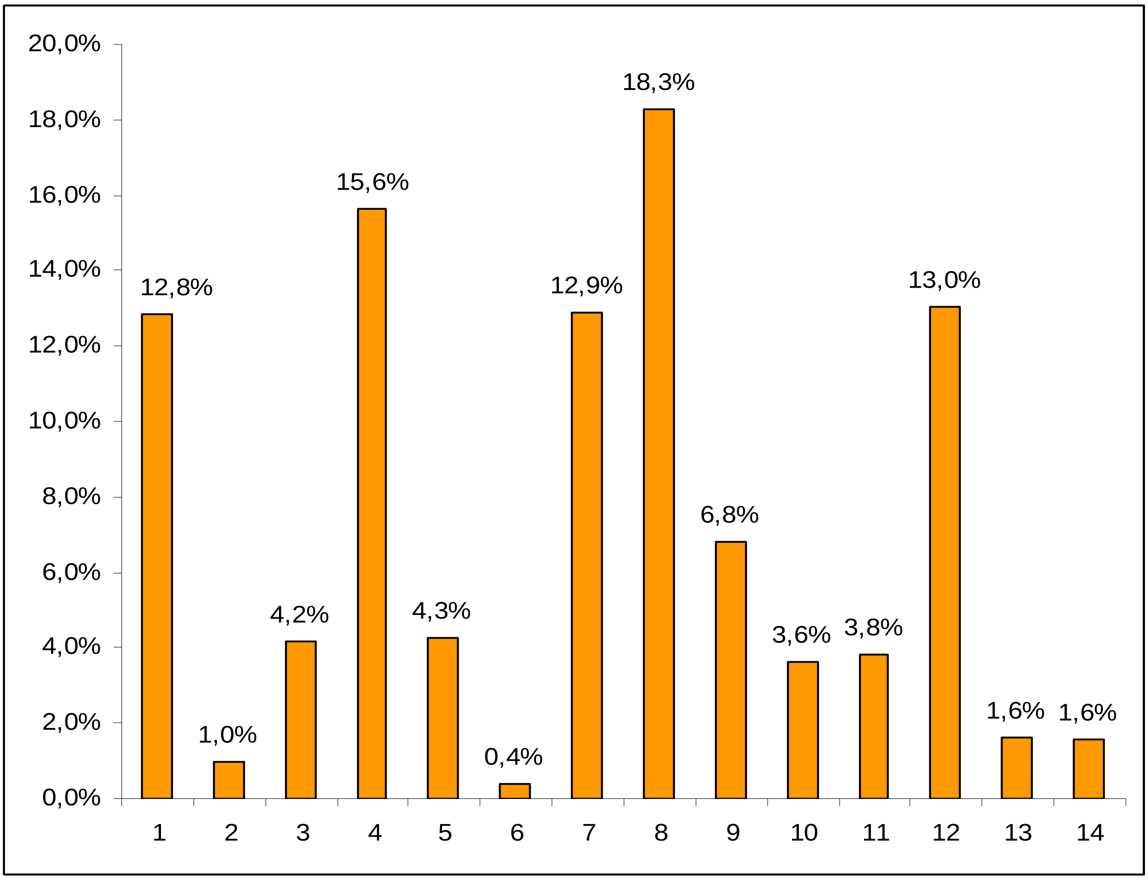
Von den 1538 Schüler/innen gaben 57,4% an, dass Mathematik ein Fach ist, das sie gerne mögen. Bei den männlichen Schülern bejahen 62,8% diese Aussage, bei den weiblichen immerhin 51,8%.

Von den 14 zur Verfügung stehenden Lernpfaden wurden fünf Lernpfade besonders oft absolviert.

1. „Funktionen – Einstieg“: 281 Schüler/innen,
2. „Pythagoras (3. Klasse)“: 242 Schüler/innen,
3. „Einführung in die Differentialrechnung“: 201 Schüler/innen,

4. „Beschreibende Statistik“ (4. Klasse): 199 Schüler/innen und
5. „Koordinatensystem und geometrische Grundbegriffe“: 198 Schüler/innen.

Die folgende Grafik zeigt, von welchem Prozentsatz die einzelnen Lernpfade evaluiert wurden.

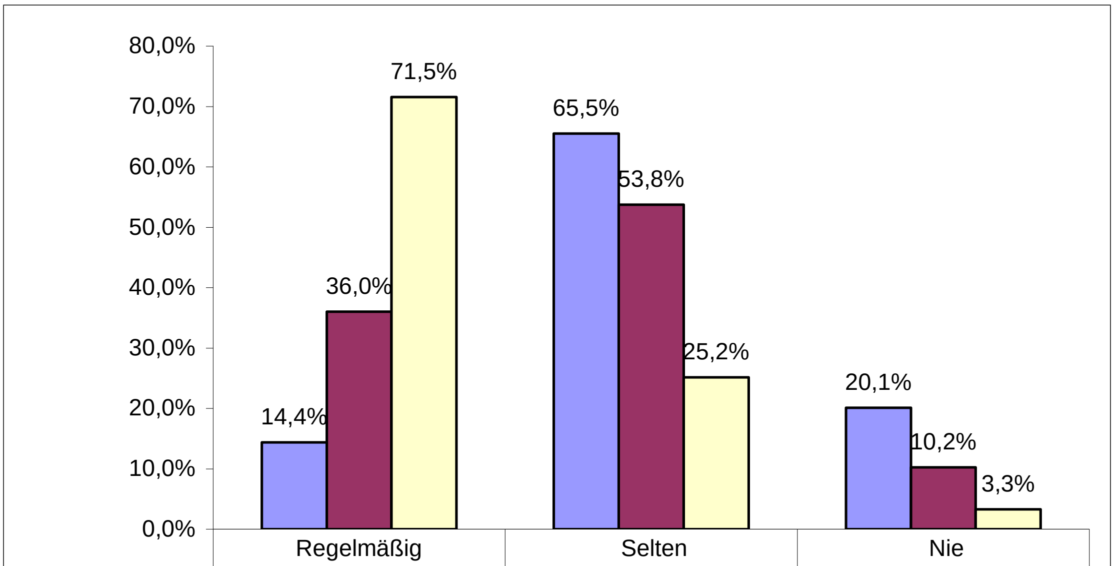


1	Koordinatensystem und geometrische Grundbegriffe	12,8%
2	Kongruenz – vermuten, erklären, begründen	1,0%
3	Dreiecke – Merkwürdige Punkte	4,2%
4	Pythagoras (3. Klasse)	15,6%
5	Pythagoras im Raum (4. Klasse)	4,3%
6	Zylinder – Kegel – Kugel	0,4%
7	Beschreibende Statistik (4. Klasse)	12,9%
8	Funktionen – Einstieg	18,3%
9	Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1	6,8%
10	Vektorrechnung in der Ebene, Teil 2	3,6%
11	Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung	3,8%
12	Einführung in die Differentialrechnung	13,0%
13	Einführung in die Integralrechnung	1,6%
14	RSA-Algorithmus: Asymmetrische Verschlüsselung	1,6%

7.2.1 Allgemeines

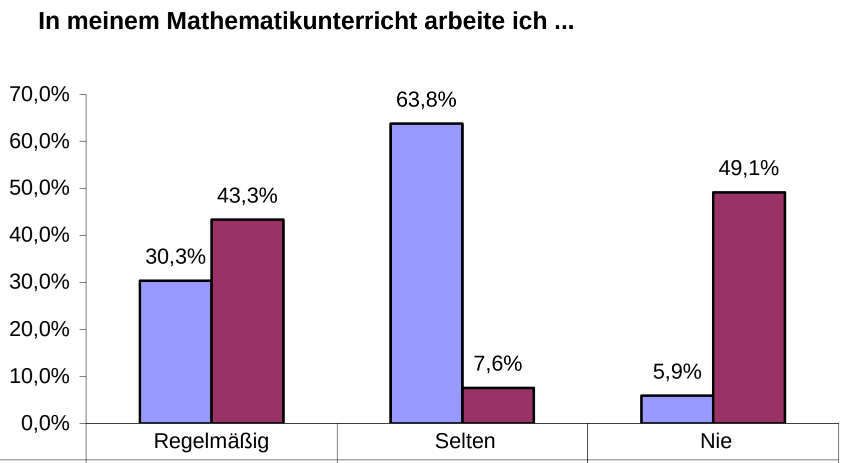
Im ersten Teil des Fragebogens wurden allgemeine Informationen über den Mathematikunterricht und die Schüler/innen erhoben. Diese Informationen betrafen die Arbeitsweise der Schüler/innen, den Einsatz moderner Technologien im Mathematikunterricht, die Einschätzung der eigenen Computerkenntnisse und vieles mehr. Die Ergebnisse seien hier nun vorgestellt.

Im Mathematikunterricht arbeitet ein Großteil der Schüler/innen (71,5%) regelmäßig in Einzelarbeit, aber nur annähernd ein Drittel der Schüler/innen (36%) arbeitet regelmäßig in Partnerarbeit.



	Regelmäßig	Selten	Nie
Gruppenarbeit	14,4%	65,5%	20,1%
Partnerarbeit	36,0%	53,8%	10,2%
Einzelarbeit	71,5%	25,2%	3,3%

Beim Einsatz neuer Technologien im Mathematikunterricht zeigt sich ein interessantes, aber wenig überraschendes Bild.

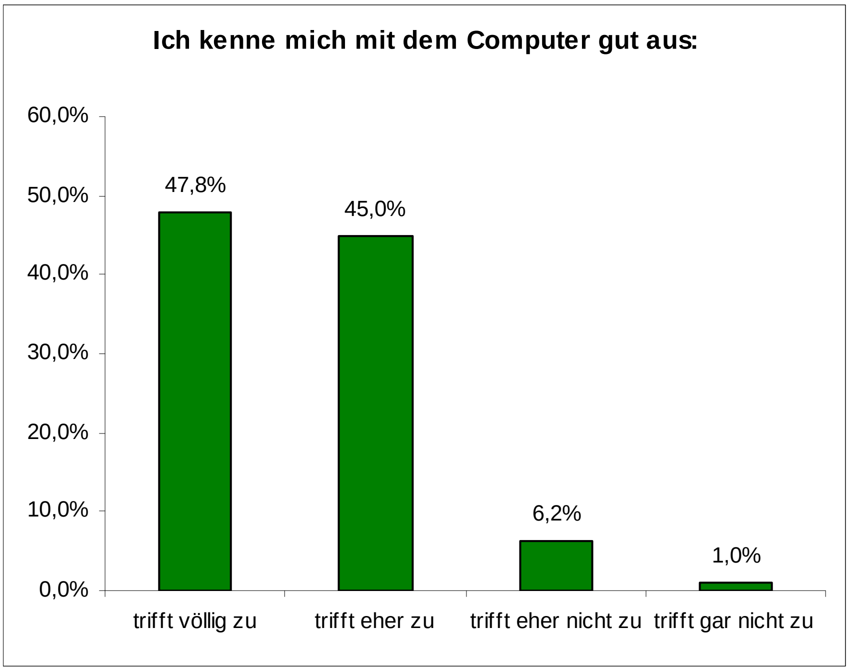


	Regelmäßig	Selten	Nie
mit dem Computer	30,3%	63,8%	5,9%
mit einem programmierbaren Taschenrechner	43,3%	7,6%	49,1%

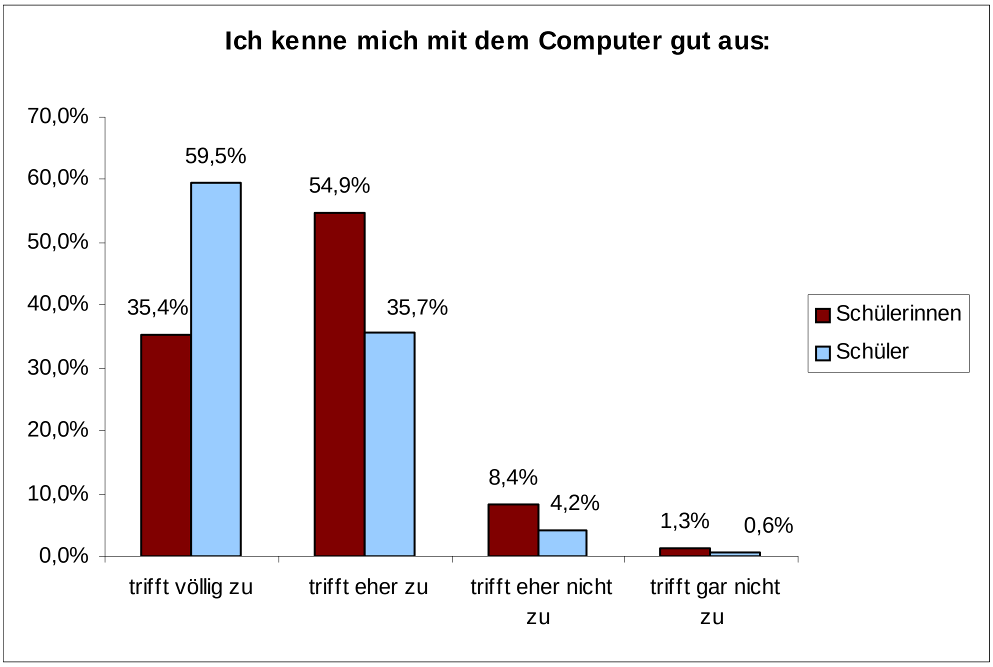
Programmierbare Taschenrechner werden entweder regelmäßig eingesetzt oder nie. Mit dem Computer arbeiten immerhin 30,3% der Schüler/innen regelmäßig. Das Arbeiten mit Lernplattformen und Webquests ist im Mathematikunterricht kaum vertreten.

Bei der Frage, welches weitere Arbeitsmaterial Schüler/innen im Unterricht benützen, sind den Unterricht ergänzende Arbeitsblätter, die Verwendung eines Schulbuches sowie klassisches Zubehör (Zirkel, Lineal, …) annähernd gleich vertreten. Erfreulich ist, dass einige Schüler/innen explizit angaben, im Mathematikunterricht mit ihren „Verstand" (Verstand, Hirn, Köpfchen, …) zu arbeiten.

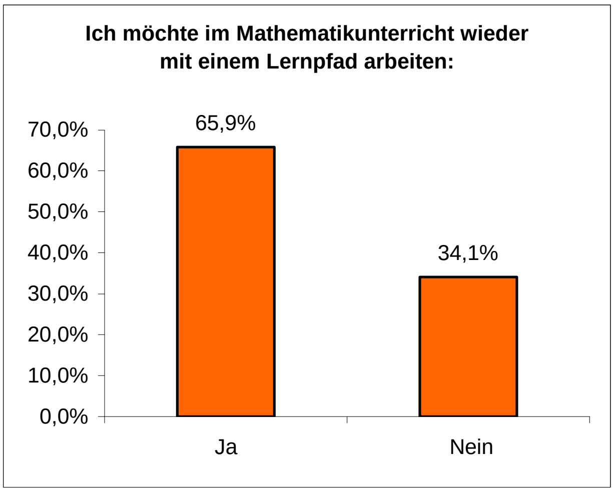
Die eigenen Computerkenntnisse werden von den Schüler/innen als sehr gut eingestuft. Für 92,8% der Schüler/innen trifft die Aussage „Ich kenne mich mit dem Computer gut aus“ völlig oder eher zu. Nur 7,2% sind von ihren Computerkenntnissen nicht überzeugt.



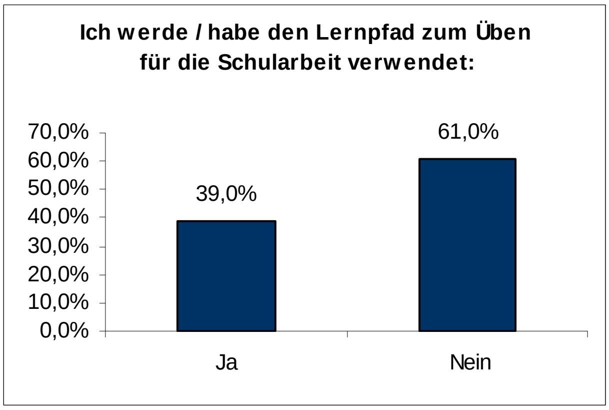
Wertet man diese Daten geschlechtspezifisch aus, so ergeben sich merkbare Unterschiede.

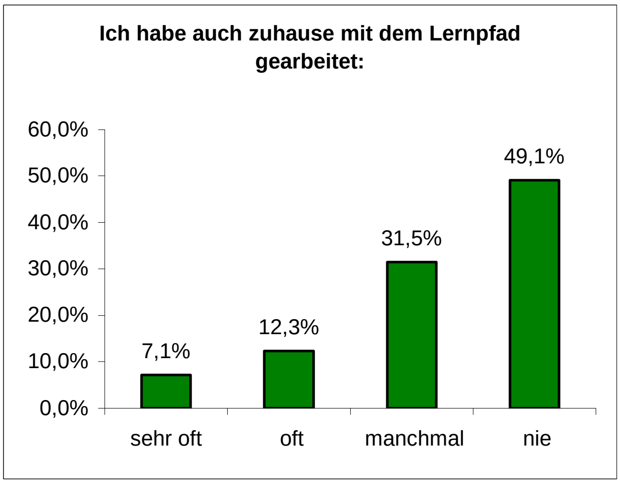


Dass die Schüler/innen Gefallen an den Lernpfaden finden, zeigt, dass eine überwiegende Mehrheit (65,9%) der Schüler/innen im Mathematikunterricht wieder mit einem Lernpfad arbeiten möchte. Dabei drücken mehr Schüler/innen der Unterstufe – nämlich 75,6% – den Wunsch nach weiteren Lernpfaden aus, in der Oberstufe sind dies nur noch 55,7% der Schüler/innen.



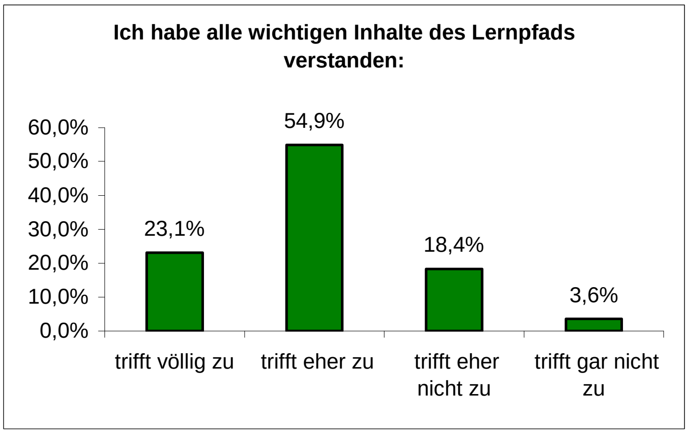
Vereinzelt wurde mit den Lernpfaden auch zuhause gearbeitet bzw. für die Schularbeit geübt. Dass dies nicht öfter der Fall war, liegt vermutlich daran, dass die Lernpfade nur eine begrenzte Anzahl von Aufgaben enthalten. Zum einen wurden diese Aufgaben von den Schüler/innen bereits während des Unterrichts gelöst, zum anderen sind die Inhalte der Lernpfade meist auf die Erarbeitung eines neuen Inhalts und nicht auf das Üben der Inhalte ausgerichtet.

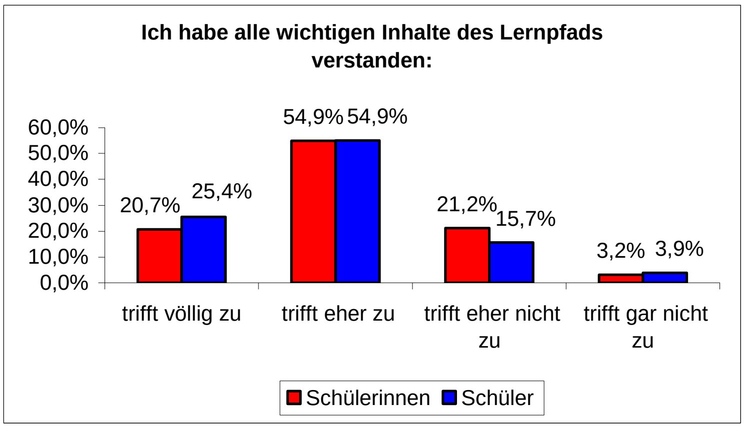




In diesem Zusammenhang erscheinen die Frage, ob die Schüler/innen denn die Inhalte des Lernpfads verstanden haben, als recht bedeutend und das Feedback der Schüler/innen als sehr zufrieden stellend.

Denn für 78% der Schüler/innen trifft die Aussage: „Ich habe alle wichtigen Inhalte des Lernpfads verstanden“, völlig bzw. eher zu. Dies ist natürlich „nur“ eine Selbsteinschätzung der Schüler/innen und keine Einschätzung durch den/die Lehrer/in.



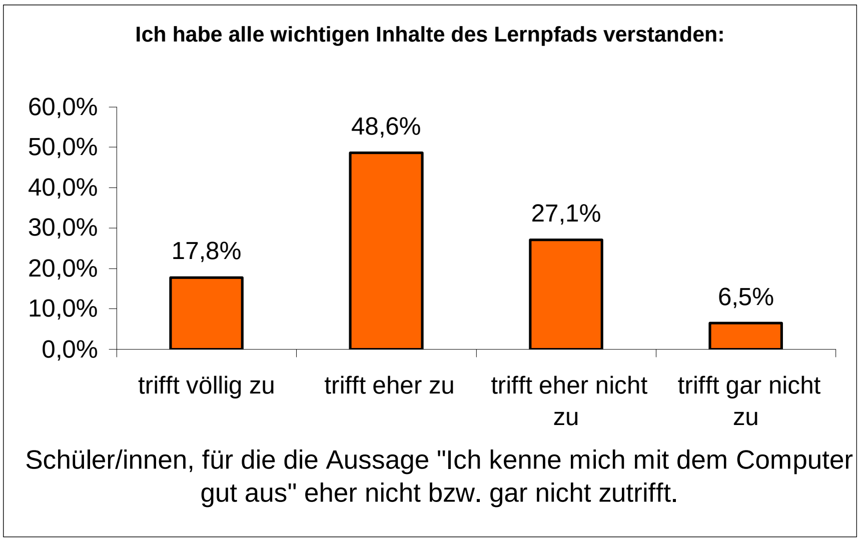


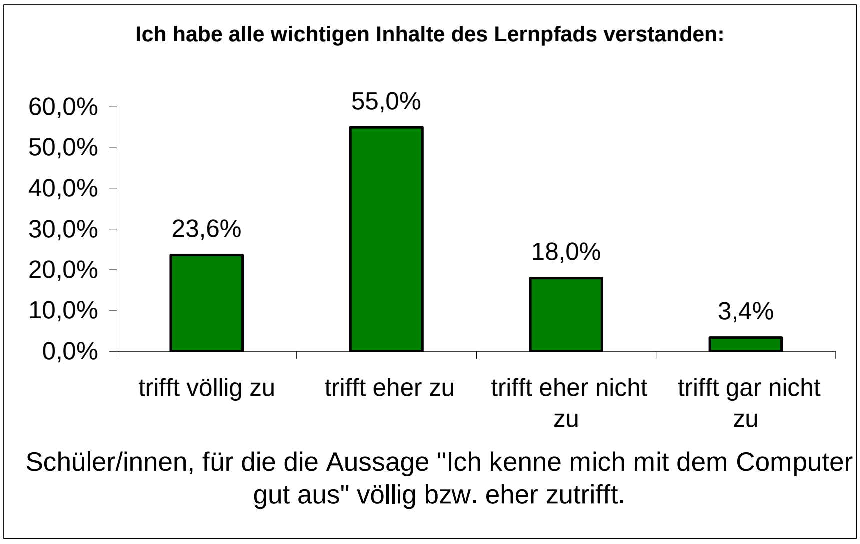
Werden die Daten geschlechtsspezifisch ausgewertet, so ergibt sich ein etwas verschobenes Bild.

Nur auf 20,7% der Mädchen, aber auf 25,4% der Buben trifft die Aussage: „Ich habe alle wichtigen Inhalte des Lernpfads verstanden“, völlig zu. Ferner trifft auf wesentlich mehr Mädchen diese Aussage eher nicht zu.

Noch deutlicher unterscheiden sich die Ergebnisse von den obigen, wenn nur jene Schüler/innen betrachtet werden, die ihre Computerkenntnisse selbst als eher unzureichend einstufen.

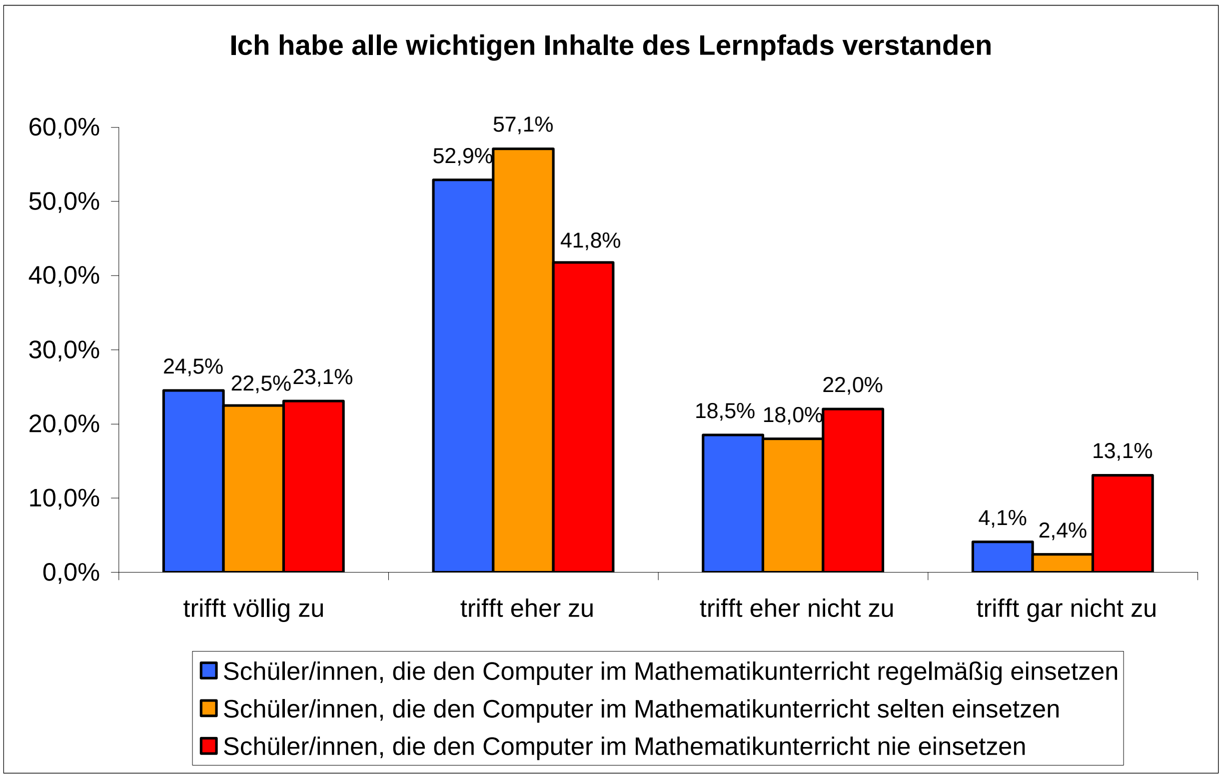
In diesem Fall trifft die Aussage nämlich nur noch auf 66,4% der Schüler/innen völlig bzw. eher zu und auf 33,6% der Schüler/innen eher nicht bzw. gar nicht zu.





Betrachtet man hingegen jene Schüler/innen, deren Selbsteinschätzung bezüglich der eigenen Computerkenntnisse höher ist, zeigt sich, dass deren Selbsteinschätzung auch hinsichtlich des Verstehens der Inhalte höher ist, denn da stimmen 78,6% der Aussage völlig bzw. eher zu und nur 21,4% können der Aussage eher nicht bzw. gar nicht zustimmen.

Relativ gering wirkt sich aus, ob der Computer im Mathematikunterricht regelmäßig oder selten eingesetzt wird, denn da geben 77,4% der Schüler/innen, die den Computer im Mathematikunterricht regelmäßig einsetzen und 79,6% der Schüler/innen, die den Computer selten einsetzen, an, dass die Aussage: „Ich habe alle wichtigen Inhalte des Lernpfads verstanden“, völlig bzw. eher zutrifft.

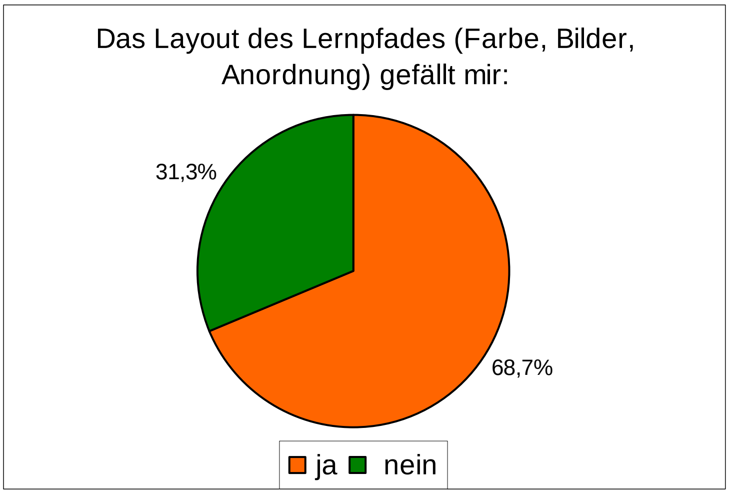


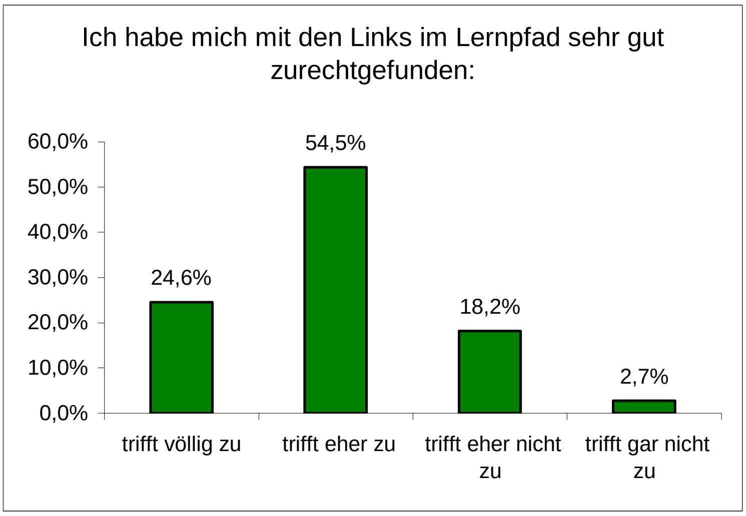
Auffällig anders schätzen Schüler/innen ein, ob sie alle wichtigen Inhalte des Lernpfades verstandenen haben, wenn sie den Computer im Mathematikunterricht nie einsetzen. Hier ist es so, dass 35,1% angeben, die Aussage: „Ich habe alle wichtigen Inhalte des Lernpfads verstanden“, trifft auf sie eher nicht bzw. gar nicht zu.

Insgesamt folgt daraus, dass die negative Selbsteinschätzung der eigenen Computerkenntnisse zu einer eher geringeren Selbsteinschätzung beim Verstehen der Inhalte beiträgt. Hier könnte gemäß dem Allgemeinbildungskonzept von H. W. Heymann mit einer Stärkung des Schüler-Ichs Positives bewirkt werden. Die Daten ergeben aber auch, dass Schüler/innen, die den Computer im Mathematikunterricht nie einsetzen, ebenfalls eine geringere Selbsteinschätzung beim Verstehen der Inhalte haben.

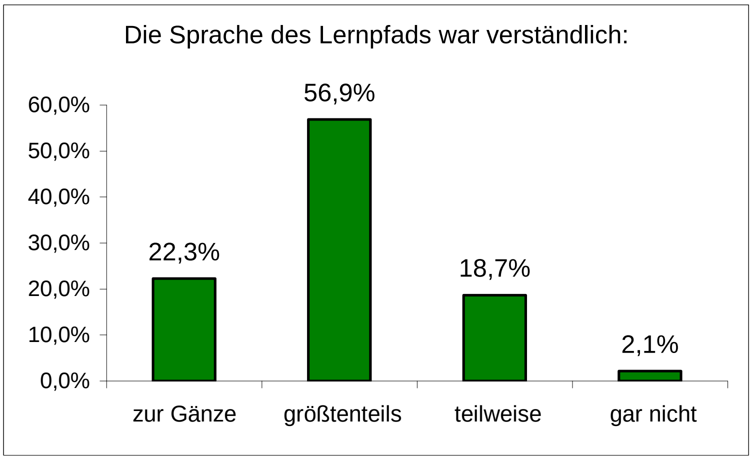
7.2.2 Ergebnisse zur Usability der Lernpfade

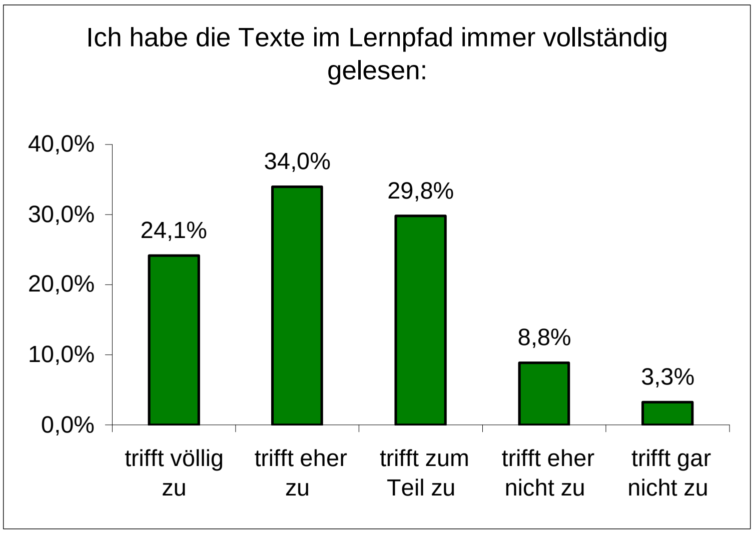
Die Usability der Lernpfade wurde von den Schüler/innen recht zufrieden stellend beurteilt. Das Layout kam bei fast 70% der Schüler/innen gut an, mit den Links haben sich ebenso viele sehr gut zurechtgefunden.





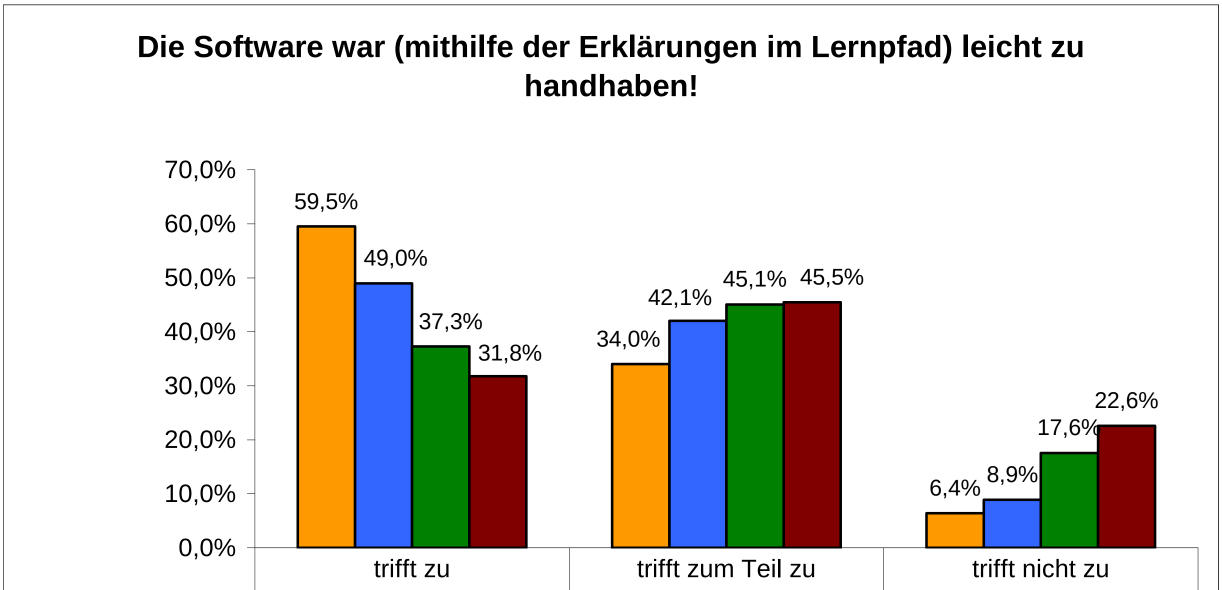
Die Sprache der Lernpfade war für fast 80% der Schüler/innen „zur Gänze“ bzw. „größtenteils“ verständlich. Deutlich mehr als die Hälfte der Schüler/innen trifft die Aussage: „Ich habe die Texte im Lernpfad immer vollständig gelesen“ völlig bzw. eher zu.





7.2.3 Ergebnisse zur Usability mathematischer Software

Alle Lernpfade enthalten Tipps und Hinweise zur Handhabung spezieller mathematischer Software. Diese wurden von den jeweiligen Spezialistinnen und Spezialisten verfasst, die die Software regelmäßig im Unterricht einsetzen und daher die Bedürfnisse der Schüler/innen kennen. Ich gehe davon aus, dass alle in den Lernpfaden integrierten Software-Anleitungen ein gleich hohes Maß an Qualität aufweisen. Dennoch sind die Evaluationsergebnisse ganz unterschiedlich ausgefallen.



	trifft zu	trifft zum Teil zu	trifft nicht zu
Excel	59,5%	34,0%	6,4%
Geogebra	49,0%	42,1%	8,9%
Voyage, TI89, …	37,3%	45,1%	17,6%
Derive	31,8%	45,5%	22,6%

Die Erklärungen zu Excel wurden von 655 Schüler/innen beurteilt, 59,5% davon gaben an, dass es zutrifft, dass Excel mithilfe der Erklärungen im Lernpfad leicht zu handhaben war. Damit haben die Exceltipps die beste Bewertung erhalten. Dies liegt sicher auch an der Art und Weise, wie die Hilfen zur Verfügung gestellt wurden. Denn für den Lernpfad „Beschreibende Statistik“ wurden Videoanleitungen und parallel dazu verbale Anleitungen samt Screenshots erstellt. Vor allem die Videoanleitungen wurden von den Schüler/innen bei offenen Fragenfeldern (siehe Abschnitt 7.2.4.1) immer wieder positiv hervorgehoben.

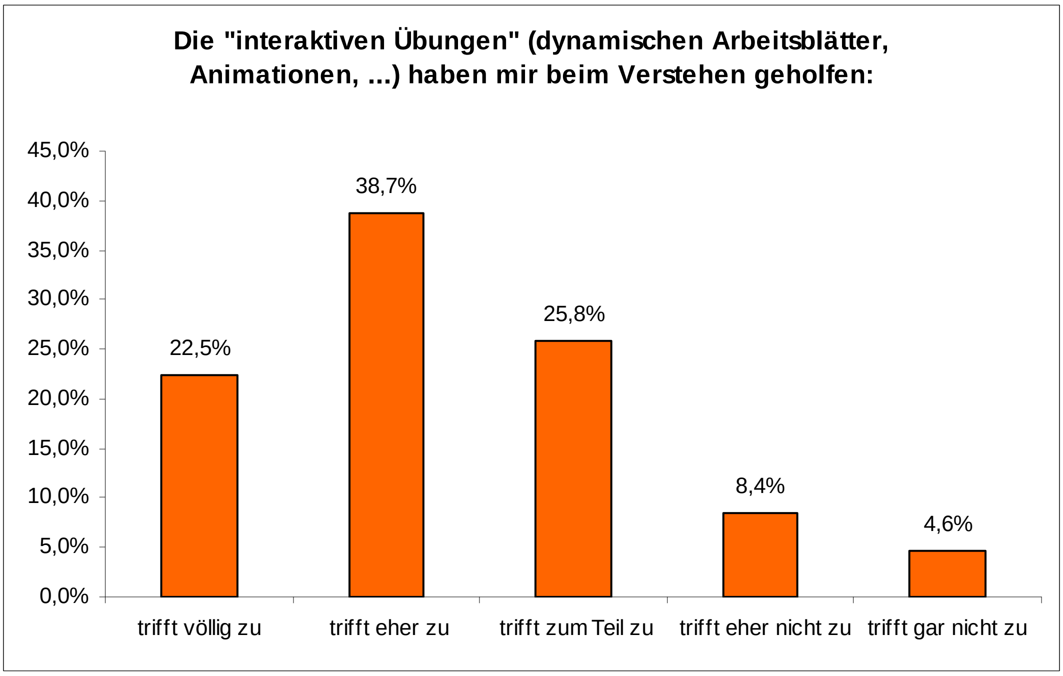
Die Bedienungshinweise zu GeoGebra wurden von 800 Schüler/innen evaluiert. Die Ergebnisse sind ebenfalls – wie der obigen Grafik zu entnehmen ist – sehr gut ausgefallen. Die Evaluationsergebnisse zu den Hilfestellungen bei CAS-Rechnern (n = 102 Schüler/innen) und Derive (n = 336 Schüler/innen) bestätigen die schon angesprochene Tatsache, dass Schüler/innen trotz intensiver Bemühungen immer wieder Schwierigkeiten beim Umgang mit einem CAS haben (siehe Abschnitt 5.2.5).

7.2.4 Ergebnisse zur Frage, ob interaktive Übungen beim Verstehen helfen

Da alle Lernpfade „interaktive Übungen“ beinhalten und sich dadurch wesentlich von herkömmlichen webbasierten Inhalten unterscheiden, ist die Frage, ob diese den Schülerinnen und Schülern beim Verstehen helfen eine essentielle. Daher bat ich die Schüler/innen um Auskunft, ob und wie ihnen die interaktiven Übungen[49] beim Verstehen geholfen haben.

Auch hier sind die Ergebnisse sehr positiv, denn für 61,2% der Schüler/innen trifft die Aussage: „Die interaktiven Übungen (dynamischen Arbeitsblätter, Animationen, …) haben mir beim Verstehen geholfen“, völlig bzw. eher zu.

[49] Einige der interaktiven Übungen wurden von den Ersteller/innen selbst erzeugt, bei manchen wurde auf bereits bestehende Webressourcen zurückgegriffen.



Viele Schüler/innen waren auch bereit, stichwortartig eine solche interaktive Übung zu beschreiben und zu erklären, was dabei hilfreich war. Die in den folgenden Kapiteln wiedergegebenen Zitate der Schüler/innen sind im Originalwortlaut angeführt und nicht den orthographischen Regeln angepasst.

7.2.4.1 Interaktive Übungen beim Lernpfad „Pythagoras “

Im Kapitel 6.3.2 wurden die drei wesentlichen interaktiven Multimedia-Komponenten (Video, interaktive Beweise, Pythagorasbäume) dieses Lernpfads bereits ausführlich beschrieben. Die erste dieser Komponenten ist das schon erläuterte Video zur Herleitung des Satzes von Pythagoras (Interaktivitätsstufe I), das bei 22 Schüler/innen den Verstehensprozess unterstützen konnte.

Zitate von Schüler/innen:

- „Das Video, dass jedoch nicht von allen Computern zu starten war, hat mir geholfen den Satz von Pythagoras besser zu verstehen! Es hat mir geholfen überhaupt einmal zu verstehen um was es brei diesem Satz ging und ich mich besser mit der Lösung zurecht“
- „der Film hat mir geholfen es leichter zu verstehen!!“
- „Der Film: man konnte sehr schön den Satz von Pythagoras erkennen“

- „Der Kurzfilm hat mir dabei geholfen den Satz von Pythagoras zu verstehen. In diesem Film wurde der Flächeninhalt der quadrierten Seiten (mit bunten ixen dargestellt) in die der quadrierten Hypothenuse gezogen.“
- „Film über Pythagoras Satz – a^2 Kreuze wurden mit b^2 Kreuze in c^2 hinein gezogen.“

Einigen Schüler/innen sind der Inhalt dieses Videos und damit natürlich auch der Satz von Pythagoras noch so lebhaft in Erinnerung, dass sie ihn sogar recht ausführlich mit eigenen Worten beschreiben.

Zehn Schüler/innen signalisieren deutlich, dass die interaktiven Zerlegungsbeweise (Interaktivitätsstufe IV), die mit Arbeitsblättern und Handlungsanweisungen kombiniert sind, beim Verstehensprozess behilflich waren.

Zitate von Schüler/innen:

- „Der Beweis zum Satz von Pythagoras ($a^2+b^2=c^2$): man hat daraus sehr gut erkennen können, dass a^2 und b^2 in c^2 passen“
- „die Puzzle Beweise haben mir geholfen zu verstehen wie der Satz von Pythagoras zustande kommt“
- „mir hat das Arbeitsblatt geholfen, wo man das eine zerschnitten hat und es in das andere gelegt hat, und es genau hinein gepasst hat.“
- „Die Beweise haben mir sehr geholfen Pythagoras zu verstehen.“

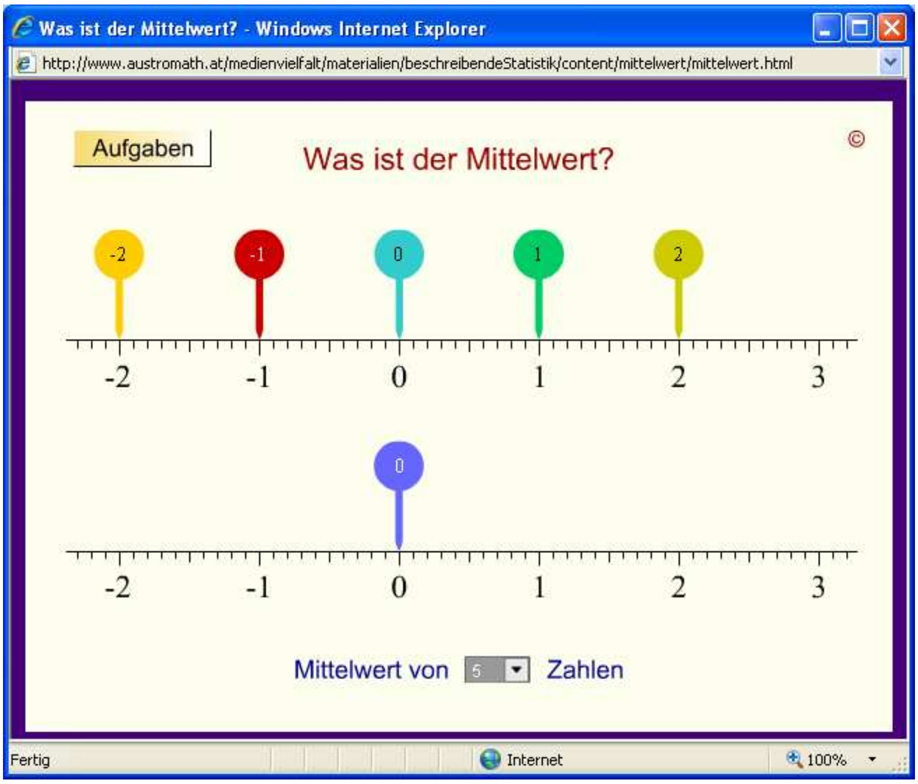
Bei den Pythagorasbäumen schätzen die Schüler/innen, dass der Aufbau dieser mithilfe der Applets interaktiv erklärt wird.

7.2.4.2 Interaktive Übungen beim Lernpfad „Beschreibende Statistik“

Der Lernpfad „Beschreibende Statistik“ enthält vier Multimedia-Komponenten, die von www.mathe-online.at stammen und einige Videos, in denen das Arbeiten mit Excel vorgeführt wird.

Die erste dieser Multimedia-Komponenten ist eine Flash-Animation mit dem Titel „Was ist der Mittelwert?“[50] und entspricht der Interaktivitätsstufe IV („Den Inhalt der Komponenten modifizieren“ vgl. Abschnitt 5.5.1.2).

Die Schüler/innen können bei dieser Lernhilfe wählen, ob sie den Mittelwert von 2, 3, 4 oder 5 Zahlen ermitteln möchten. Jeder „Pfeil“ der oberen Skala repräsentiert eine von den Schüler/innen frei zu wählende Zahl.



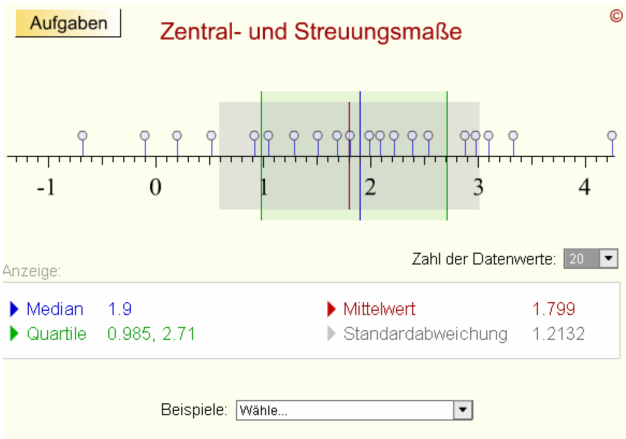
Die Pfeile können mittels Maus entlang der Skala verschoben werden und nach den Vorstellungen der Schüler/innen positioniert werden. Der blaue Zeiger in der unteren Reihe stellt den Mittelwert, gerundet auf 3 Nachkommastellen, dar und passt sich automatisch den von den Schüler/innen gewählten Werten und ihren Veränderungen an.

Eine weitere Multimedia-Komponente – „Zentral- und Streuungsmaße“[51] – dieses Lernpfads entspricht ebenfalls der vierten Interaktivitätsstufe und ist wie die zuvor beschrie-

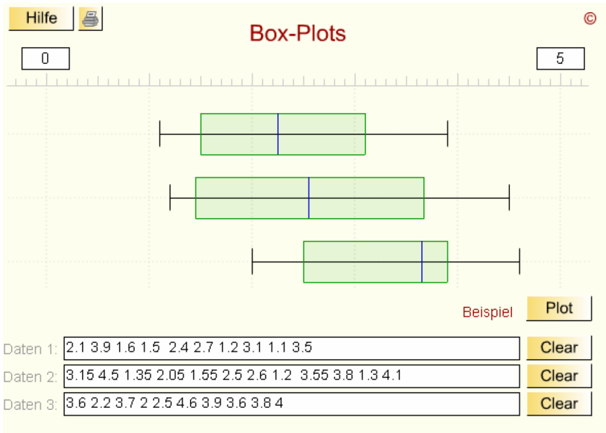
[50] http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/beschreibendeStatistik/content/mittelwert/mittelwert.html (gültig am 19.07.2007)
[51] http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/beschreibendeStatistik/content/zstr/index.html (gültig am 19.07.2007)

bene zu bedienen. Mit der Multimedia-Komponente „Box-Plots“[52] (ebenfalls auf Interaktivitätsstufe IV) können die Schüler/innen eigene Datenlisten eingeben und erhalten per Knopfdruck den entsprechenden Box-Plot. Zudem ist es möglich, Box-Plots von drei verschiedenen Datenlisten gleichzeitig anzuzeigen und zu vergleichen.

Zentral- und Streuungsmaße



Box-Plots



Die restlichen Multimedia-Komponenten dieses Lernpfads entsprechen der ersten Interaktivitätsstufe „Objekte betrachten und rezipieren“, dienen ausschließlich der Information, Instruktion sowie Illustration und den Benutzer/innen ist es nicht möglich den Inhalt zu verändern. Im Lernpfad handelt es sich bei diesen Objekten um einen Film (inklusive Ton) zur Standardabweichung und Videos, in denen die Berechnung statistischer Kennzahlen mit Excel vorgeführt werden. Da von beidem hier nur ein nicht aussagekräftiger, eingefrorener Bildausschnitt gezeigt werden könnte, unterbleibt diese Darstellung.

All die eben vorgestellten Multimedia-Komponenten wurden von den Schüler/innen als hilfreich beim Verstehen empfunden. Die folgenden Zitate aus der Online-Umfrage[53] unterstreichen diese Tatsache.

[52] http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/beschreibendeStatistik/content/BoxPlot/index.html (gültig am 19.07.2007)

[53] Im Fragebogen forderte ich die Schüler/innen auf, eine hilfreiche interaktive Übung stichwortartig zu beschreiben und zu erklären, was dabei geholfen hat.

Zitate von Schüler/innen zu den Flash-Animationen:

- „Balkenverschieber"[54]
- „Da waren drei striche und die haben den mittelpunkt angezeigt. Das hat mir geholfen das Prinzip des Mittelwerts zu verstehen."
- „Flash-Lernhilfe. Das mit den Pfeilen. Hat mir geholfen die Arbeit zu verstehen."
- „Mir hat die Animation mit den Strichen sehr beim Median geholfen"
- „Statistik: verändern der Zeiger um festzustellen wie sich Ausreißer verhalten"
- „eine Animation mit Ton die erklärt, was man zu tun hat; habe mich danach sehr gut ausgekannt"
- „Bewegung der Werte einer statistik"
- „Stecknadeln auf Zahlenstrahl"
- „Die »interaktiven Übungen« im Bezug auf den Mittelwert, Median usw. haben mir beispielsweise sehr geholfen, da man sich sehr viel merkt, wenn man selber »interaktiv« eine Übung machen kann. Ich fand im allgemeinen die Übungen mit Animationen hilfreicher"
- „Gut war die Grafik, in der man den Mittelwert, Boxblot, … durch verschieben der Zahlen, sich ausrechnen hat können."

Zitate von Schüler/innen zu Excel und den Videoanleitungen:

- „Die Videos im Excel zum erstellen von Listen haben mir sehr geholfen"
- „Excel: die Rechnungen zu verstehen und die Formeln leichter zu merken"
- „die anweisungen zur ausrechnung beispielsweise des Medians im Excel"
- „das kleine Video über das Excel-Programm hat mir sehr weitergeholfen"
- „große Hilfe durch Excel"
- „Tabellen gestalten mit Excel"
- „Boxplotvideo"

Zusammenfassend kann also festgehalten werden, dass das Arbeiten mit interaktiven Komponenten den Schüler/innen geholfen hat, „da man sich sehr viel merkt, wenn man

[54] Damit ist vermutlich die Flash-Animation zum Mittelwert bzw. zu den Zentral- und Streumaßen gemeint.

selber »interaktiv« eine Übung machen kann". Auch Excel und die Videoanleitungen haben einigen Schüler/innen geholfen und damit zweifelsohne zur bereits oben angeführten positiven Selbsteinschätzung der Computerkenntnisse, die wiederum die subjektive Einschätzung des Verstehens der Inhalte beeinflusst, beigetragen.

Neben den hier angeführten Schüler/innenstatements wurde einige Male erwähnt, dass die „Zeichnungen" bzw. Grafiken in diesem Lernpfad sehr hilfreich waren.

7.2.4.3 Interaktive Übungen beim Lernpfad „Funktionen – Einstieg"

Im Lernpfad „Funktionen – Einstieg" werden neben einigen Funktionsplottern auch Multimedia-Komponenten verschiedener Interaktivitätsstufen angeboten. Zwei davon werden von den Schüler/innen am häufigsten explizit erwähnt. Es handelt sich dabei um die Flash-Animation zur Volumsberechnung einer Schachtel, diese wird 41 Mal hervorgehoben, und die Flash-Animation zur Erstellung einer Temperaturkurve in Abhängigkeit von der Zeit, die fünfmal genannt wird.

Im gesamten Lernpfad tritt die Flash-Animation zur Volumsberechnung einer Schachtel mehrmals in verschiedenen Aufgabenstellungen auf. Die erste diesbezügliche Aufgabenstellung[55] lautet:

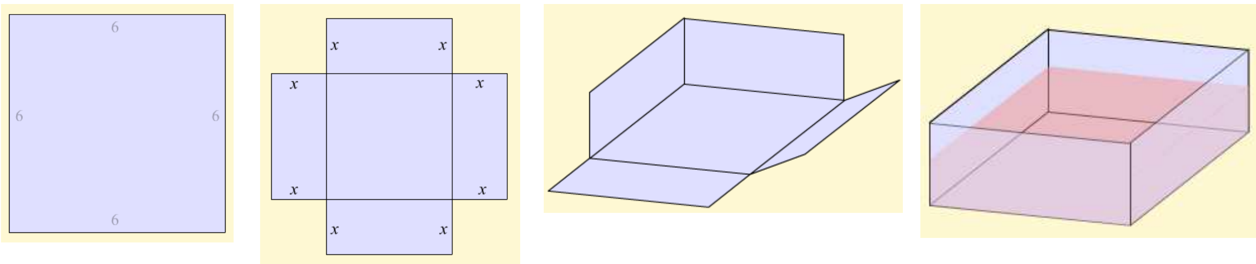
> ***„Aufgabe:*** *Aus einem quadratischen Stück Papier (Seitenlänge 6) soll eine Schachtel hergestellt werden. Dazu werden bei den Ecken vier kleinere (gleich große) Quadrate herausgeschnitten und das verbleibende Stück Pappe zu einer Schachtel (ohne Deckel) aufgeklappt. Betrachte dazu die Flash-Animation*
>
> *Aufgabenstellung*[56]
>
> *Wir werden uns in den nächsten Lernschritten damit beschäftigen, wie die Schachtel dimensioniert werden muss, damit ihr Volumen möglichst groß ist. Dazu fragen wir zunächst, wie groß ihr Volumen überhaupt ist! Das hängt*

[55] http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/funktionen/einstieg/content/Schachtelbeispiel1.html (gültig am 21.07.2007)
[56] Link zur Flash-Animation

natürlich davon ab, wie groß die Quadrate sind, die zunächst herausgeschnitten wurden.

Berechne das Volumen der Schachtel, wenn die Seitenlänge der herausgeschnittenen Quadrate 1 beträgt!
Berechne das Volumen der Schachtel, wenn die Seitenlänge der herausgeschnittenen Quadrate 2 beträgt!
Ermittle eine Formel für das Volumen der Schachtel, wenn die Seitenlänge der herausgeschnittenen Quadrate (wie in der Animation) mit x bezeichnet wird!“

Diese Flash-Animation auf Interaktivitätsstufe I zeigt schrittweise, wie besagte Schachtel entsteht. Die nachfolgenden Bilder sind Ausschnitte dieser Animation, die leider nicht angehalten werden kann.



Die Schüler/innen äußern sich zum Inhalt dieser Animation überwiegend positiv und geben an, dass sie vor allem eine Hilfe für die räumliche Vorstellung war.

Positives Feedback von Schüler/innen:

- „Die Übung mit dem Schachtelbeispiel hat mir gut gefallen und man hat es auch gut verstanden da man es von allen Seiten gesehen hat und es auch farblich gut dargestellt ist“
- „Schachtelbeispiel – geholfen hat mir, dass nacheinander langsam die seiten beschrieben wurden und man so die einzelnen Seiten besser im Auge behalten hat können und verfolgen hat können, was mit der Siete passiert“
- „Durch die schrittweise Animation beim Schachtelbeispiel konnte ich mir gut vorstellen, wie das Beispiel zu lösen ist.“

- „Beim Schachtelbeispiel war eine Animation die mir sehr geholfen hat das Beispiel bildlich vorzustellen!“
- „Schachtelbeispiel: es wurde graphisch dargestellt wie eine Schachtel zusammengebaut wird und es hat mir sehr geholfen weil ich keine Graphische-denkerin bin!!“

Ein Schüler bzw. eine Schülerin schreibt:

- „Die Animation hat mir nicht sehr geholfen. Aber ich verstand besser um was es geht“

Die Statements der Schülerinnen und Schüler legen nahe, dass diese Animation wirklich nur eine Hilfe für die räumliche Vorstellung des Sachverhalts ist, die den Schüler/innen scheinbar schwer fällt, und nicht für das eigentlich verlangte Erkennen der voneinander abhängigen Größen. Die Animation zeigt nämlich bloß, wie *eine* Schachtel entsteht, wenn vier Quadrate mit der Seitenlänge x ausgeschnitten werden. Um die Abhängigkeit des Volumens von der Größe x zu zeigen, müsste in der Animation jedoch das x variiert werden können.

Eine bzw. ein andere/r merkt an:

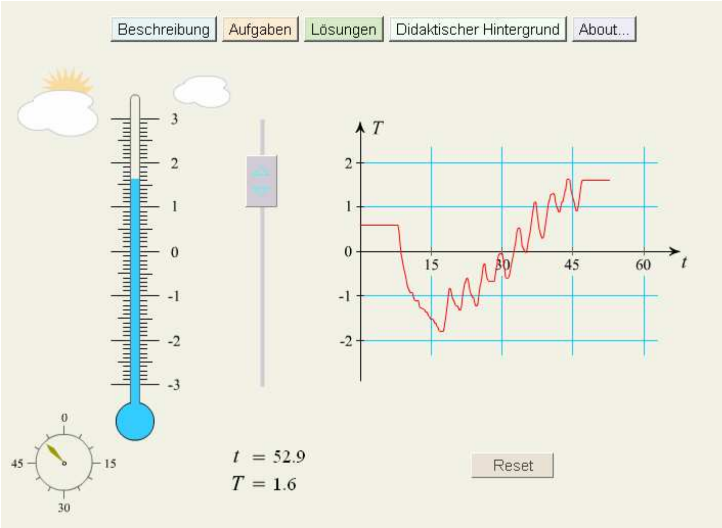
- „Das Schachtelbeispiel hat sih zu schnell verändert (zu schnell zusammengefaltet)“

Auch nach meinem Empfinden läuft die Animation zu schnell ab und darüber hinaus kann sie nicht – wie oben erwähnt – gestoppt werden. Das führt eventuell dazu, dass die für die Aufgabenstellung nötigen Denkschritte nicht beim ersten Betrachten vollständig erbracht werden können. Es ist zwar möglich, die Animation mehrmals ablaufen zu lassen, dennoch wäre eine „Stopp-Taste“ sicher sehr hilfreich, damit man seine eigenen Überlegungen während des Ablaufs händisch aufschreiben kann, ohne dass die Animation dann schon weiterschreitet oder gar zu Ende ist.

Das nächste Bild zeigt einen eingefrorenen Ausschnitt der Flash-Animation zur Erstellung einer Temperaturkurve.

Die Aufgabe der Schüler/innen lautete[57]:

„Simulieren sie [sic] verschiedene Wetterverläufe! Benutzen Sie dazu auch die links unten eingeblendete Uhr. Betrachten Sie jedes Mal danach die aufgezeichnete Kurve und versuchen Sie, den Wetterverlauf aus ihr zu rekonstruieren!



Machen Sie sich klar, wie die Temperatur, die zu einem gegebenen Zeitpunkt geherrscht hat, im Nachhinein aus dem Diagramm ermittelt werden kann. (Durch die Art, wie die Graph zustande kommt, ist sichergestellt, dass zu jedem Zeitpunkt nur ein Temperaturwert aufgezeichnet wird).“

Im Anschluss daran mussten die Schüler/innen einige konkrete Temperaturverläufe interpretieren.

Nur ein/e Schüler/in äußert sich ausführlicher – als mit der bloßen Nennung des Namens der Animation – zur Animation, beschreibt aber nur deren Funktionsweise und nicht, was hilfreich war:

> *„Temperaturkurve: mit einem Schieberegler die Temperatur einstellen und dabei die Auswirkungen auf dem Diagramm betrachten.“*

Und fügt hinzu:

> *„Anmerkung: Man sollte das Diagramm scrollen könne, da man so auch über einen noch längeren Zeitraum die Auswirkungen beobachten kann“*

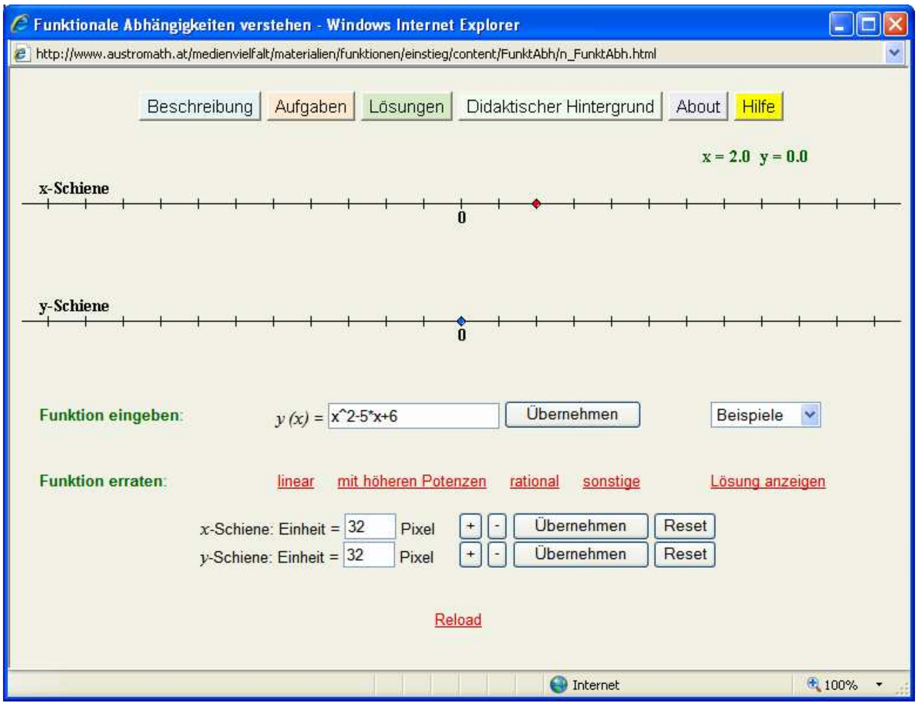
Auch dieser Kritik kann ich mich anschließen oder würde zumindest empfehlen, dass der Uhrzeiger stehen bleibt, wenn das Ende der sichtbaren Skala erreicht ist und nicht weiterläuft. Ferner sei noch angemerkt, dass die Flash-Animation, wenn sie tatsächlich das

[57] http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/funktionen/einstieg/content/temperatur/aufgaben.html (gültig am 21.07.2007)

Simulieren eines Wetterverlaufes ermöglichen will, ein unrealistisches Zeitintervall vorgibt. In einer Stunde ändert sich die Temperatur im Allgemeinen nur wenig, wie ja auch auf dem Screenshot zu sehen ist.

Eine weitere Multimedia-Komponente mit dem Titel „Funktionale Abhängigkeiten verstehen“[58] wird bloß ein Mal von einem/einer Schüler/in als hilfreich angeführt.

Zitat:
„*verschieben von punkten*[59] *an in einer animation -> bessere Vorstellung*“



Leider wird aufgrund dieser Aussage nicht klar, wie das Verschieben von Punkten hier zu einer besseren Vorstellung beitragen kann.

Einige wenige Schüler bzw. Schülerinnen empfinden Excel – insbesondere das Gestalten von Tabellen mit Excel – als Hilfe. Die im Lernpfad vorgestellten Funktionsplotter werden von den Schüler/innen erstaunlicherweise gar nicht genannt. Daraus ist nicht unbedingt zu schließen, dass sie nicht hilfreich waren, sondern eher, dass sie nicht als interaktiv von den Schüler/innen empfunden werden.

Insgesamt weist der Lernpfad also einige interaktive Multimedia-Komponenten auf, die für die Schüler/innen zwar hilfreich waren, aber dennoch verbesserbar sind, um einer-

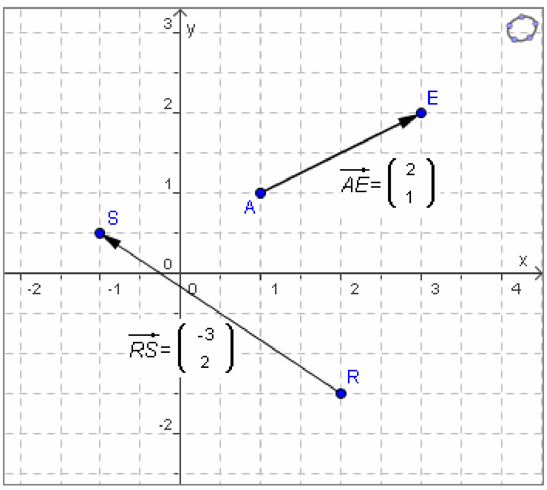
[58] http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/funktionen/einstieg/content/FunktAbh/n_FunktAbh.html (gültig am 21.07.2007)
[59] Da es im Lernpfad „Funktion – Einstieg“ nur ein interaktives Objekt gibt, bei dem Punkte bewegt werden können, kann nur das hier angeführte gemeint sein.

seits die „richtigen“ Inhalte zu transportieren und andererseits die Entdeckungs- und Experimentierfreude der Schüler/innen nicht einzuschränken (siehe Temperaturkurve).

7.2.4.4 Interaktive Übungen beim Lernpfad „Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1“

Der Lernpfad „Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1“ stellt viele dynamische Arbeitsblätter bereit, die mit GeoGebra erzeugt wurden und zumeist der Interaktivitätsstufe III oder IV entsprechen. Die Schüler/innen betonen in ihren Aussagen vor allem den hilfreichen Aspekt Vektoren verschieben zu können. Zwei solcher interaktiver Übungen[60] möchte ich daher herausgreifen und charakterisieren.

Koordinaten von Pfeilen



A. Lindner 2005, erstellt mit GeoGebra

Bei der hier ausschnittweise abgebildeten Multimedia-Komponente auf Interaktivitätsstufe IV können die Schüler/innen den Inhalt modifizieren, indem sie beliebig an den Punkten A, E, R oder S ziehen. Mit dem Ziehen an den Punkten ändern sich auch gleichzeitig die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{AE}$ oder $\overrightarrow{RS}$.

Die diesbezügliche Aufgabe lautet:

- *„Verändere Anfangs- und Endpunkt des Pfeils $\overrightarrow{AE}$ und des Pfeils $\overrightarrow{RS}$ und beobachte die Veränderung der Koordinaten!*
- *Versuche einen Pfeil zu finden, dessen x-Koordinate negativ und dessen y-Koordinate positiv ist. In welchem Fall sind beide Koordinaten negativ?*
- *Worin können sich verschiedene Pfeile unterscheiden?“*

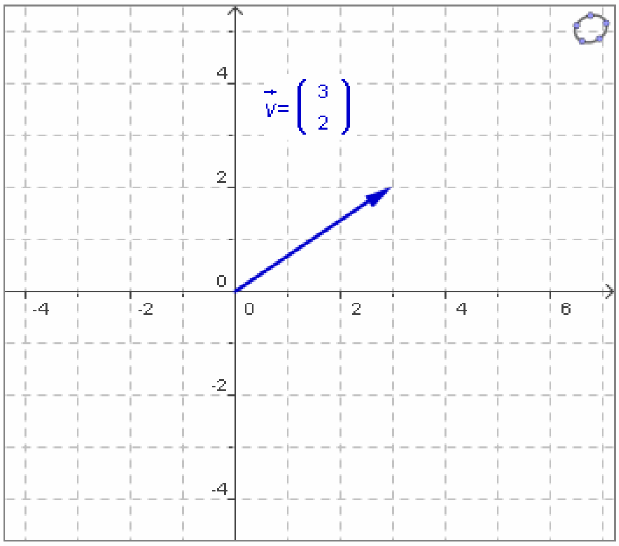
[60] http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/Vektoren1/lernpfad/MV_Vektor1/sites/Pfeil.htm (gültig am 23.07.2007)

Pfeile und Vektoren

Auch hier können die Schüler/innen den Inhalt der Komponente auf zwei verschiedene Arten modifizieren:

(A) Die Spitze des Vektors kann beliebig bewegt werden und gleichzeitig ändern sich die Koordinaten von $\vec{v}$.

(B) Der Vektor $\vec{v}$ kann an seinem Anfangspunkt gefasst und an beliebige Positionen im Koordinatensystem verschoben werden, wobei die Koordinaten von $\vec{v}$ natürlich gleich bleiben.



M. Hohenwarter, A. Lindner 2005, erstellt mit GeoGebra

Die Aufgabenstellung zu dieser Komponente lautet:

1. *Ziehe den Pfeil $\vec{v}$ an seiner Spitze mit der Maus und beobachte dabei die Koordinaten des Vektors $\vec{v}$. Wo liegt der Pfeil für die Koordinaten a) $\vec{v}$ = (1,0), b) $\vec{v}$ = (0,2)? Schreibe deine Ergebnisse auf.*
2. *Ziehe jetzt den Pfeil an seinem Anfangspunkt. Was passiert mit den Koordinaten des Vektors $\vec{v}$? Schreibe deine Beobachtung auf.*
3. *Lies mit Hilfe des Koordinatengitters die aktuellen Koordinaten des Anfangspunktes und des Endpunktes des Pfeils ab. Nenne dabei den Anfangspunkt am besten A und den Endpunkt E.*
4. *Versuche einen Zusammenhang zwischen den Koordinaten des Anfangspunktes A, des Endpunkts E und dem Vektor $\vec{v}$ herzustellen! Überprüfe deine Vermutung für mind. drei verschiedene Vektoren und schreib deine Ergebnisse auf.*
5. *Wie berechnet man die Koordinaten des Vektors $\vec{v}$, wenn Anfangs- und Endpunkt des Pfeils allgemein gegeben sind: A=(x_A, y_A) und E=(x_E, y_E)? Schreib deine Vermutung ebenfalls in dein Heft.*

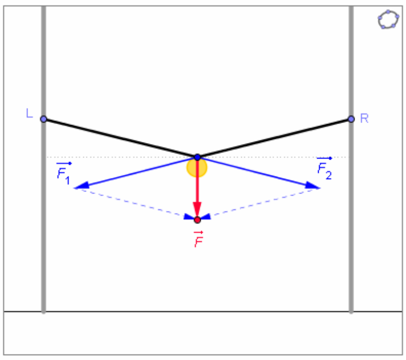
Dass die Schüler/innen die interaktiven Möglichkeiten beim Arbeiten mit Vektoren als hilfreich empfinden, verdeutlichen die folgenden Aussagen.

Zitate von Schüler/innen:

- „Bei Abbildungen von Vektoren hat mir das Bewegen der Pfeile sehr geholfen"
- „Als man die Vektoren ziehne konnte und sich die Koordinaten verändert haben"
- „Da man durch Veränderung der Werte die grafische Veränderung sehen konnte."[61]
- „Es hat mir die sichtbare Veränderung geholfen"
- „Zum Beispiel bei den Vektoren, dass man sie verschieben konnto und so sehen konnte wie sich das auf die Koordinaten auswirkt."

Nachdem die Schüler/innen im Lernpfad das Rechnen mit Vektoren kennen gelernt haben, werden verschiedene physikalische Aufgabenstellungen bearbeitet, bei denen die dynamischen Arbeitsblätter ebenfalls von den Schüler/innen geschätzt wurden.

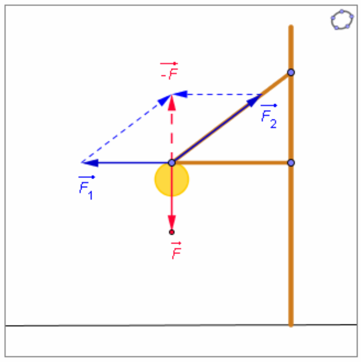
1. Straßenbeleuchtung



© A. Lindner 2005, erstellt mit GeoGebra

Bei diesem dynamischen Arbeitsblatt kann die Lage des linken und rechten Aufhängungspunktes der Straßenbeleuchtung verändert und die Veränderung der wirkenden Kräfte beobachtet werden.

2. Laterne

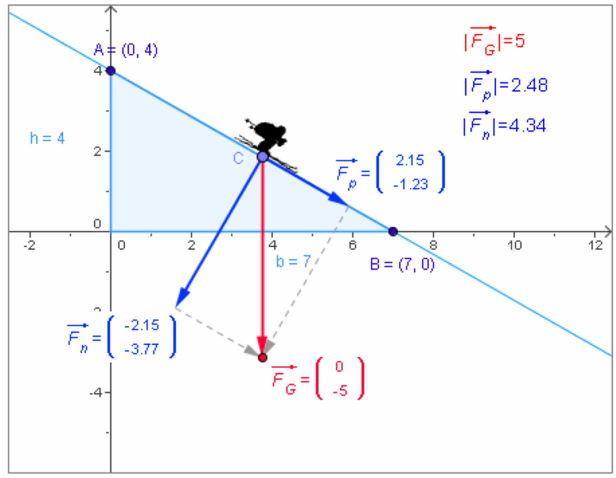


© A. Lindner 2005, erstellt mit GeoGebra

Beim diesem dynamischen Arbeitblatt kann das Gewicht der Lampe sowie die Position der Verstrebung verändert und die Veränderung der wirkenden Kräfte beobachtet werden.

[61] Hier kann nur die Umkehrung gemeint sein, denn es gibt in diesem Lernpfad kein dynamisches Arbeitsblatt, das es erlaubt zuerst die Werte zu verändern, die dann eine Änderung der grafischen Darstellung verursachen.

3. Schiefe Ebene



© A. Lindner 2005, erstellt mit GeoGebra

Bei dieser Komponente können

- die Position des Skifahrers auf der schiefen Ebene,
- die Hangneigung und
- das Gewicht des Skifahrers verändert werden.

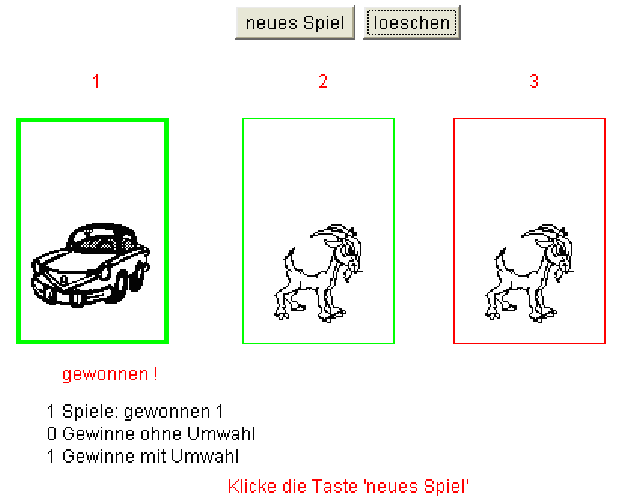
Diese drei Multimedia-Komponenten erlauben den Benutzer/innen mausgesteuerten Veränderungen vorzunehmen und damit einhergehende Veränderungen der Kraftvektoren zu beobachten. Die Schüler/innen äußern sich dazu folgendermaßen:

- „Aufhängung einer Straßenlaterne an zwei Streben, graphik hilfreich bei der Lösung der gestellten Aufgaben“
- „Bei der Lampe die gut gemachten Vektorverschiebungen“
- „bei der laterne konnte man selbstständig die kräfte und positionen verändern und somit die veränderung der vektoren beobachten.“
- „DIE LATERNE: animation hat sehr geholfen, um veränderungen zu beobachten“
- „Die Laterne:Die vielen erklärungen und Aufgaben haben mir geholfen diese Beispiel zu verstehen,ebenso da man alles verschieben und sich danach die veränderung anshen kann“
- „Schiefe Ebene, Visualisierung!! ☺“
- „schiefe Ebene; gute Veranschaulichung der Kräfte beim Schifahrer;Darstellung ist gut zumerken“
- „So praktische beispiele mit Laternen besser verstehen der Formeln“

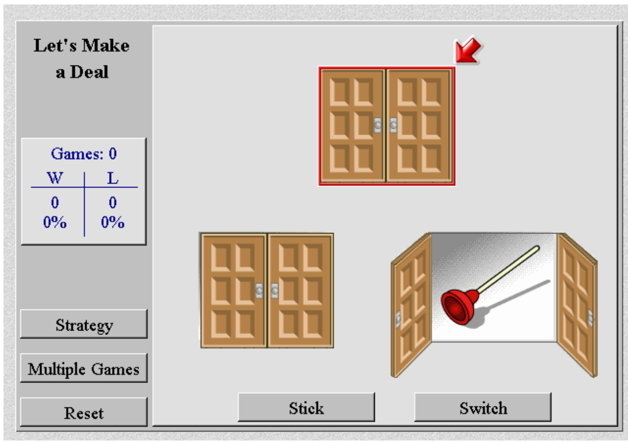
Auch hier wird wie bei vielen vorhergehenden interaktiven Komponenten deutlich, dass den Schüler/innen das selbstständige Manipulieren der Inhalte und die daraus resultierenden Beobachtungen beim Verstehen helfen.

7.2.4.5 Interaktive Übungen beim Lernpfad „Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung“

Bei diesem Lernpfad nennen die Schüler/innen vor allem zwei interaktive Übungen, die ihnen beim Verstehen geholfen haben. Bei der einen handelt es sich um die Möglichkeit, das klassische Ziegen- oder Monty-Hall-Problem interaktiv durchzuspielen, bei der anderen stehen den Schüler/innen „interaktive“ Baumdiagramme zur Verfügung, mit deren Hilfe sie die dazu gestellten Aufgaben lösen können.



Quelle: http://www.jgiesen.de/Quiz/Ziegenproblem/Ziegen.html#applet (gültig am 24.07.2007)



Quelle: http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_117_g_4_t_5.html (gültig am 24.07.2007)

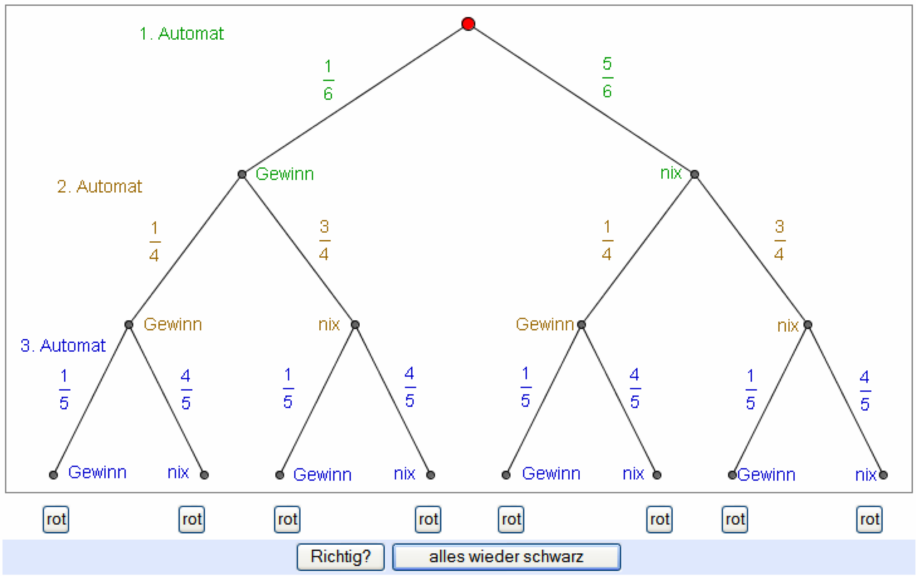
Zwei Zitate von Schüler/innen möchte ich hier anführen, die das Hilfreiche dieser Komponente verdeutlichen:

- „*Die Antwort auf das Ziegenproblem habe ich durch die Animation mit den Türn gut verstanden*“
- „*Ziegenproblem: selbst erfahren dass »switch« öfter gewinnt*“

Vor allem die zweite Aussage zeigt erneut das Potenzial interaktiver Übungen auf! Schüler/innen können mithilfe dieser erleben bzw. selbst erfahren, welche Auswirkungen ihr „Klicken“, ihre „Mausbewegungen“, ihr Tun und Handeln, dem eigene Gedanken und Überlegungen vorausgehen, haben.

Mit den schon erwähnten „interaktiven" Baumdiagrammen[62] können folgende Aufgaben gelöst werden:

1. Baumdiagramm zur Multiplikationsregel



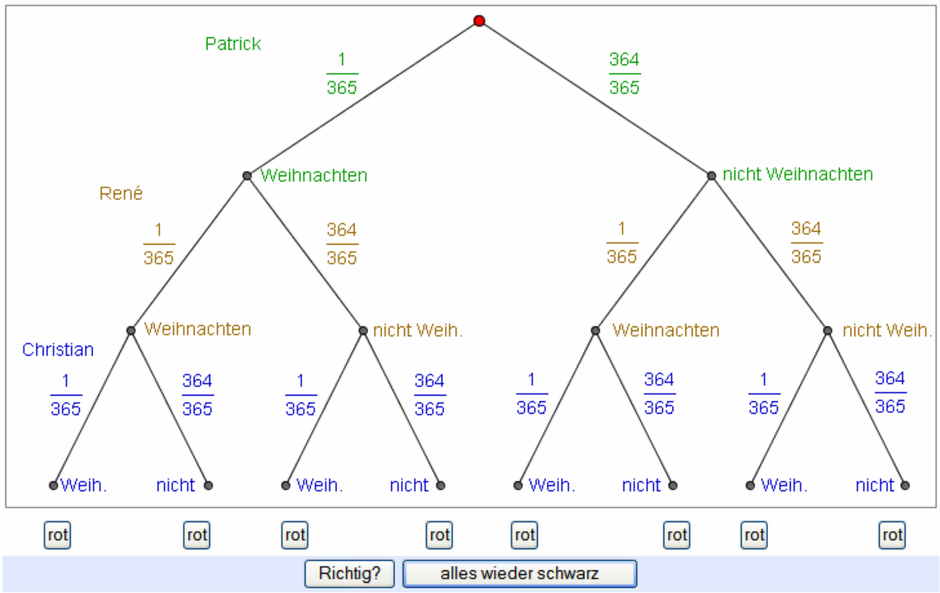
Die Aufgabenstellung lautet:

Markus spielt an einem Automaten, bei dem man mit der Wahrscheinlichkeit 1/6 gewinnt. Das ist ihm zu wenig und er wechselt beim zweiten Spiel zu einem Automaten mit der Gewinnwahrscheinlichkeit ¼ und versucht anschließend sein Glück noch bei einem Automaten, bei dem er mit der Wahrscheinlichkeit 1/5 gewinnt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er bei allen drei Automaten gewinnt?

- *Markiere den entsprechenden Weg im Baumdiagramm rot durch Klick auf den Button am Ende des Weges.*
- *Berechne die gesuchte Wahrscheinlichkeit und vergleiche das Ergebnis mit der Lösung.*

[62] http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/wkeit/lernpfad/index.htm (gültig am 24.07.2007)

2. Baumdiagramm zur Additionsregel



Die Aufgabenstellung lautet:

> *Irina lernt am Christkindlmarkt drei Burschen kennen: Patrick, René und Christian. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer von ihnen am 24. Dezember Geburtstag hat? Wir nehmen an, dass jeder Geburtstag im Jahr gleich wahrscheinlich ist.*
>
> - *Markiere die entsprechenden Wege im Baumdiagramm rot durch Klick auf den Button am Ende des jeweiligen Weges.*
> - *Berechne die gesuchte Wahrscheinlichkeit und vergleiche das Ergebnis mit der Lösung.*

Diese beiden „interaktiven" Baumdiagramme können weder der zweiten Interaktivitätsstufe (Multiple Darstellungen betrachten und rezipieren) noch der dritten (Repräsentationsformen zu variieren) eindeutig zugeordnet werden. Sie entsprechen wohl eher Baumgartners allgemeiner Definition von Interaktivität [Bau, S. 128], d. h. Mensch und Computer beeinflussen sich wechselseitig in ihrem Verhalten. Die Interaktivität dieser Komponenten besteht darin, dass der/die Benutzer/in durch Anklicken der Buttons „rot" einen Weg auswählen kann und dieser dann vom „Computer" rot markiert wird. Beim Klick auf den Button „Richtig?" gibt der Computer abhängig von der Wahl des Weges die Rückmeldungen „Perfekt!" oder „Nicht alles richtig. Kontrolliere zunächst selbst. Sind die richtigen Strecken rot und alle anderen schwarz?" (beim 1. Baumdiagramm) bzw. „Nicht alles richtig. Setze alle Strecken wieder auf schwarz. Versuche es noch mal – Es gibt sieben günstige Wege“ (beim 2. Baumdiagramm).

Unabhängig von diesen theoretischen Überlegungen hinsichtlich der Interaktivität dieser Komponenten nehmen die Schüler/innen diese Objekte als hilfreich wahr.

Zitate von Schüler/innen:

- „die interaktiven geogebra-übungsbeispiele für additionsregel und multiplikationsregel sind eine gute stütze.“
- „Die Äste des Wahrscheinlichkeitsbaums, welche anzuklicken waren, haben sehr veraugenscheinlicht, wie die Methode des Wahrscheinlichkeitsbaums funktionieren!“

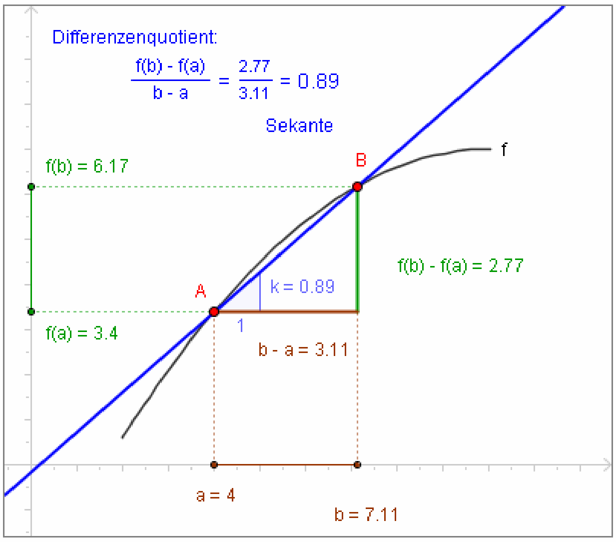
7.2.4.6 Interaktive Übungen beim Lernpfad „Einführung in die Differentialrechnung“

Der Lernpfad „Einführung in die Differentialrechnung“ enthält eine Menge interaktiver GeoGebra-Dateien, mit denen die Schüler/innen experimentieren und Zusammenhänge entdecken können. Ein Schüler/innenzitat verdeutlicht auch hier den besonderen Wert der interaktiven Übungen:

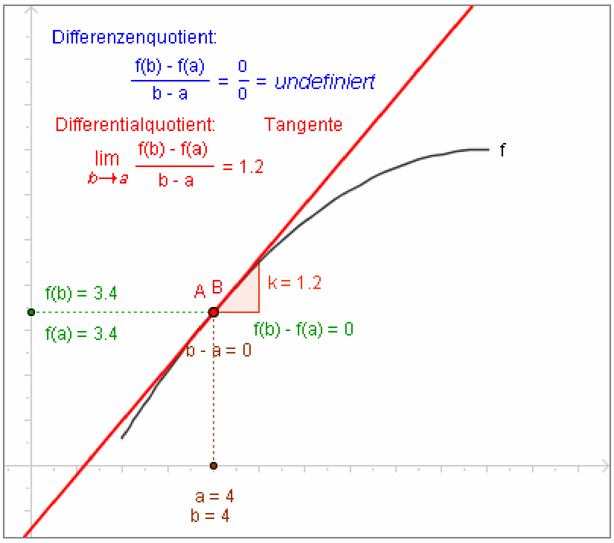
> „*Allgemein: es hilft, wenn man sieht, was sich verändert, wenn man etwas bestimmtes verändert.*“

Im Abschnitt 5.5.1.2 habe ich bereits eine zentrale Multimedia-Komponente dieses Lernpfads, nämlich das GeoGebra-Applet, das den Übergang vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten veranschaulicht, beschrieben.

1. Ausgangssituation der Komponente



2. Erwünschte Zielsituation der Komponente



Hier sollte „undefiniert“ durch „unbestimmt“ ersetzt werden.

Auch hier möchte ich nochmals Schüler/innen zu Wort kommen lassen:

- „Das man die punkte verschieben hat können, und die Veränderung so sichtbar gemacht wurde.“
- „das man die Punkte verschieben hat können, um die Veränderungen genauer verfolgen hat können.“
- „genaue kennzeichnung der objekte und die möglichkeit etwas zu verändern. Die verfoglung der veränderung war sehr hilfreich“
- „Mir hat geholfen, dass man die Punkte verschieben konnte und dass man zB. Sehen konnte, wie eine Sekante zu einer Tangente wird und der Differenzialquotient zum Differenzenquotienten.“
- „Mit den Geogebra Applets wurden die Veränderungen bildlich dargestellt und so konnte es besser verstanden werden.“

7.2.5 Resümee der Ergebnisse zur Frage, ob interaktive Übungen beim Verstehen helfen

Der Bitte, stichwortartig zu erklären, inwiefern dem/der Schüler/in eine interaktive Übung beim Verstehen geholfen hat, sind viele nachgekommen und die diesbezüglichen Ergebnisse sind eindeutig. Interaktive Übungen sind für die Schüler/innen hilfreich, wenn sie selbstständig Veränderungen vornehmen können, sehen wie sich diese auswirken, mit ihren Erwartungen vergleichen und dann daraus einen echten Erkenntnisgewinn erzielen können.

„Das(s) man genau gesehen hat was passiert, wenn ICH etwas verändere“[63]

Die Stärke der interaktiven Multimedia-Komponenten liegt also unverkennbar in der durch sie ermöglichten und unterstützten Selbsttätigkeit der Schüler/innen, die gewiss auch von der Chance, mit dieser Komponente so lange zu arbeiten, bis man selbst verstanden hat (oder zumindest das Gefühl hat, verstanden zu haben), begünstigt wird.

Dabei scheint zumindest bei den hier betrachteten Komponenten dem Maß der Interaktivität keine besondere Bedeutung zuzukommen, denn sowohl bei interaktiven Objekten der Stufe I (z. B.: Film zum Satz von Pythagoras) als auch bei solchen der Stufe IV formulieren die Schüler/innen sehr klar, dass diese hilfreich waren.

Allerdings ist von jenen, die Multimedia-Komponenten selbst erzeugen oder bereits vorhandene Komponenten in einen Lernprozess einbinden, darauf zu achten, dass sie tatsächlich das vermitteln, was sie vorgeben bzw. tatsächlich den intendierten Lernprozess fördern.

7.2.6 Lernpfade und ihr Beitrag zu einer allgemein bildenden Unterrichtskultur

Im Kapitel 3 habe ich unter anderem sieben Aufgaben eines allgemein bildenden Mathematikunterrichts – beruhend auf H. W. Heymann – diskutiert. Bei den Fragebögen habe ich diese Aufgaben und ihre vorstellbaren Ausprägungen im Mathematikunterricht erneut aufgegriffen. Ein Großteil der daraus resultierenden Items vermag Aufschluss

[63] Hervorhebung durch den/die Schüler/in

über den Beitrag der Lernpfade zu den sieben Aufgaben eines allgemein bildenden Mathematikunterrichts geben. In den folgenden Abschnitten präsentiere ich nun die Fragen und Ergebnisse der Evaluation gemeinsam und geordnet nach den ihnen entsprechenden Allgemeinbildungsaufgaben.

7.2.6.1 Lebensvorbereitung

In der Tabelle (vgl. S. 160 ff.) zu den Merkmalen einer allgemein bildenden Unterrichtskultur haben nach H. W. Heymann drei Merkmale hohe Relevanz für die Allgemeinbildungsaufgabe *Lebensvorbereitung*. Zwei davon habe ich für den Fragebogen der Schüler/innen übernommen, das dritte kam beim Lehrer/innenfragebogen zum Zug:

(1) „Die Schüler übernehmen Verantwortung für ihren eigenen Lernprozeß“
(2) „Es gibt immer wieder Gelegenheit, gemeinsam mit anderen an Probleme heranzugehen, sich über Ziele und Strategien zu verständigen, wechselseitig Schwächen auszugleichen und stärken zu bündeln (Partner- und Gruppenarbeit)“

Die entsprechenden Items des Fragebogens lauten:

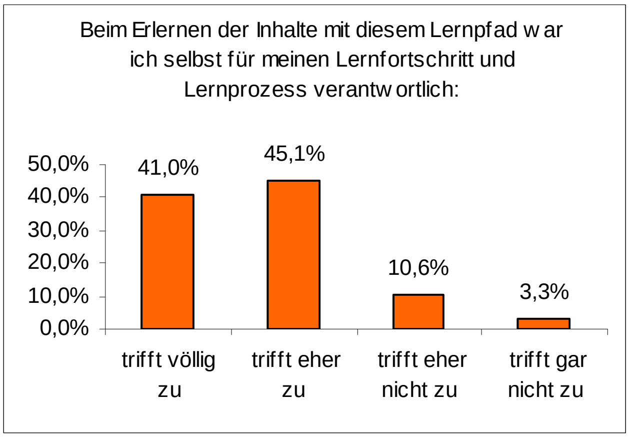
(1) Beim Erlernen der Inhalte mit diesem Lernpfad war ich selbst für meinen Lernfortschritt und Lernprozess verantwortlich:

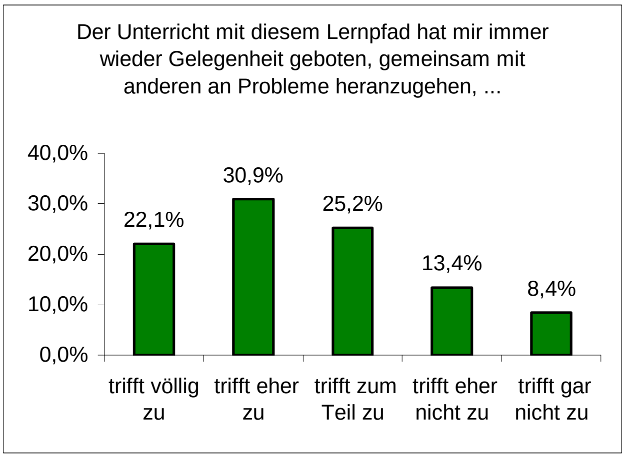
trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐

(2) Der Unterricht mit diesem Lernpfad hat mir immer wieder Gelegenheit geboten, gemeinsam mit anderen an Probleme heranzugehen, d. h. wir konnten uns über Ziele und Strategien verständigen, wechselseitige Schwächen ausgleichen und Stärken bündeln (z. B.: in Partner- und Gruppenarbeit):

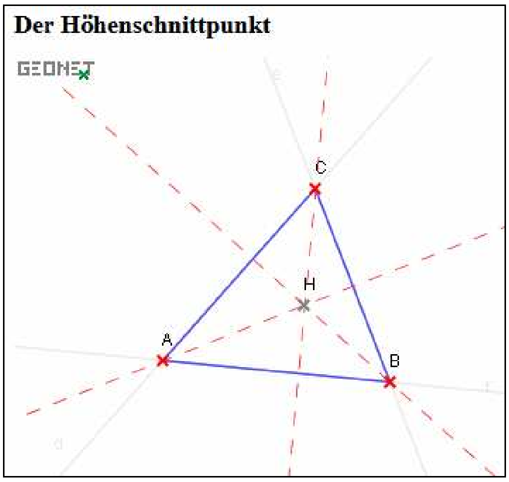
trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft zum Teil zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐	☐

Die Ergebnisse zu beiden Items zeigen, dass die Lernpfade einen Beitrag zur Lebensvorbereitung leisten können. Außerordentlich viele Schüler/innen hatten das Gefühl, für ihren Lernprozess bei dieser Unterrichtsform selbst verantwortlich zu sein. Auf die Hälfte der Schüler/innen (53%) trifft es völlig bzw. eher zu, dass der Unterricht mit dem Lernpfad Gelegenheit geboten hat, gemeinsam zu arbeiten, wechselseitig Schwächen auszugleichen und Stärken zu bündeln.





In allen Lernpfaden gibt es konkrete Inhalte, die die Eigenverantwortung der Schüler/innen fördern, aber auch fordern. So tut dies beispielsweise auch die im Folgenden kurz skizzierte Aufgabe zum Höhenschnittpunkt im Lernpfad „Dreiecke – Merkwürdige Punkte“.



Quelle: http://home.eduhi.at/teacher/alindner/geonext/fubb/Dreieck2/index.htm (gültig am 27.07.2007)

Die Schüler/innen sollen mit dieser interaktiven Multimedia-Komponente unter anderem selbstständig herausfinden, unter welcher Bedingung der Höhenschnittpunkt außerhalb des Dreiecks liegt und ihre Ergebnisse schriftlich dokumentieren.

Dabei obliegt es den Schüler/innen, wie lange sie mit dieser Komponente experimentieren (müssen), um herauszufinden, dass dies nur bei stumpfwinkeligen Dreiecken der Fall ist. Ferner sind die Schüler/innen selbst für ihre Dokumentation verantwortlich, wenngleich diese dann vom Lehrer bzw. von der Lehrerin eventuell überprüft wird.

Nach Heymann trägt die Übernahme der Verantwortung für den eigenen Lernprozess nicht nur zur Lebensvorbereitung, sondern auch zur Stärkung des Schüler-Ichs bei, die wiederum für erfolgreiches Lernen wichtig ist.

7.2.6.2 Stiftung kultureller Kohärenz und Weltorientierung

H. W. Heymann sieht einen wesentlichen Beitrag eines allgemein bildenden Mathematikunterrichts darin, „*die besondere Universalität der Mathematik und ihre Bedeutung für die Gesamtkultur anhand zentraler Ideen exemplarisch erfahrbar zu machen*“ [Hey, S. 158] und nennt folgende zwei Merkmale des Mathematikunterrichts, die hohe Relevanz in diesem Zusammenhang aufweisen:

(1) „Sinn und Bedeutung der jeweils anstehenden Mathematik werden thematisiert“ [Hey, S. 266].
(2) Vernetzungen zwischen mathematischen Teilgebieten werden herausgearbeitet, der Bezug zu zentralen Ideen wird verdeutlicht“ [Hey, S. 266].

Das hier zuerst genannte Merkmal weist zudem nach Heymanns Tabelle auch hohe Relevanz für die Allgemeinbildungsaufgabe *Weltorientierung* auf. Weltorientierung bedeutet für Heymann unter anderem auch „Erweiterung des Wahrnehmungs- und Urteilshorizonts“ sowie „Aufbau eines differenzierten Weltbildes“ [Hey, S. 183]. Da die einzelnen Schulfächer gewissermaßen nur einen Ausschnitt der Welt repräsentieren, sollte jedes Schulfach, um zur Weltorientierung beizutragen, eine Brücke vom (objektiven) Weltbezug des Faches zur (subjektiven) Welt der Schüler/innen schlagen [Hey, S. 183].

Für den Fragebogen der Schüler/innen habe ich zu den obigen Merkmalen folgende Items formuliert:

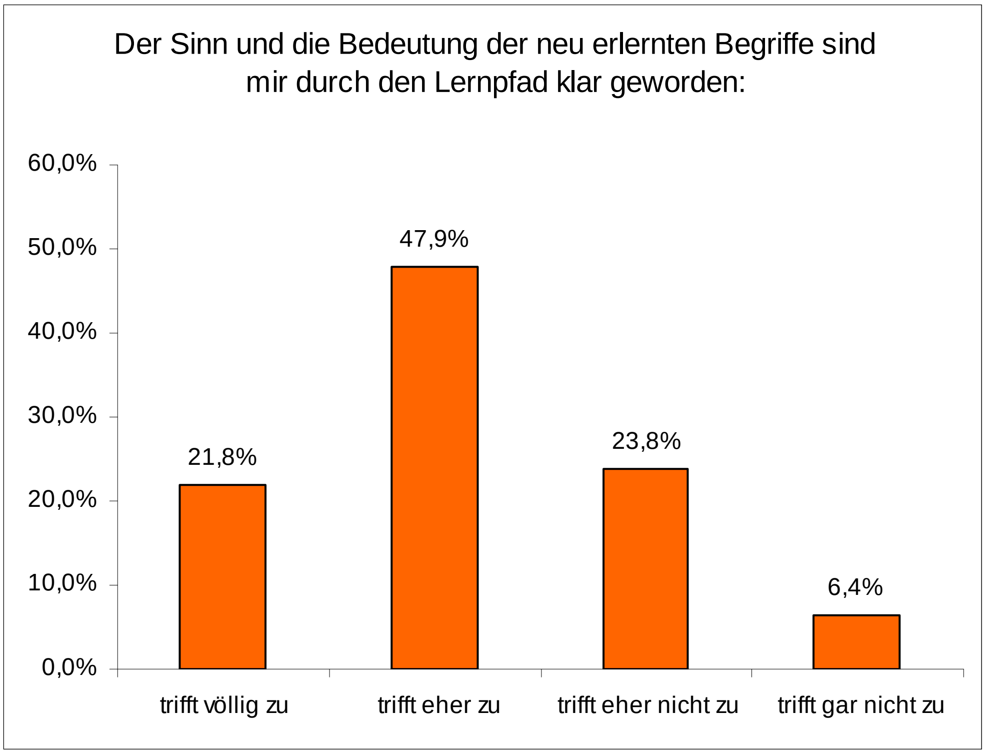
(1) Der Sinn und die Bedeutung der neu erlernten Begriffe sind mir durch den Lernpfad klar geworden:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐

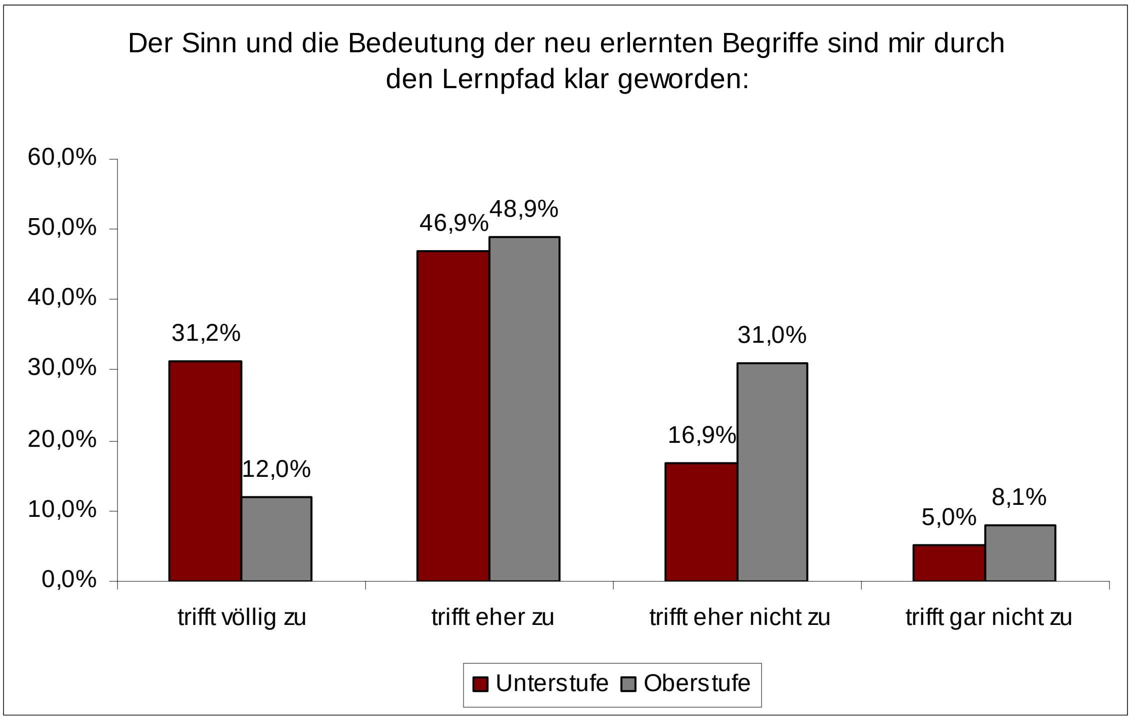
(2) Mit Hilfe dieses Lernpfades konnte ich erkennen, dass dieses neue mathematische Teilgebiet einen Zusammenhang mit anderen mathematischen Gebieten hat:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐

Die Ergebnisse zum ersten Item dieses Bereichs sind insgesamt äußert zufrieden stellend, da auf 69,7% aller Schüler/innen die Aussage „Der Sinn und die Bedeutung der neu erlernten Begriffe sind mir durch den Lernpfad klar geworden" völlig bzw. eher zutrifft.



Interessante Unterschiede gibt es in diesem Bereich bei den Schüler/innen der Unterstufe und Oberstufe. Wesentlich mehr Schüler/innen der Unterstufe, nämlich 78,1%, stimmen der Aussage völlig bzw. eher zu. Hingegen können nur 60,9% der Oberstufenschüler/innen dieser Aussage völlig bzw. eher zustimmen.



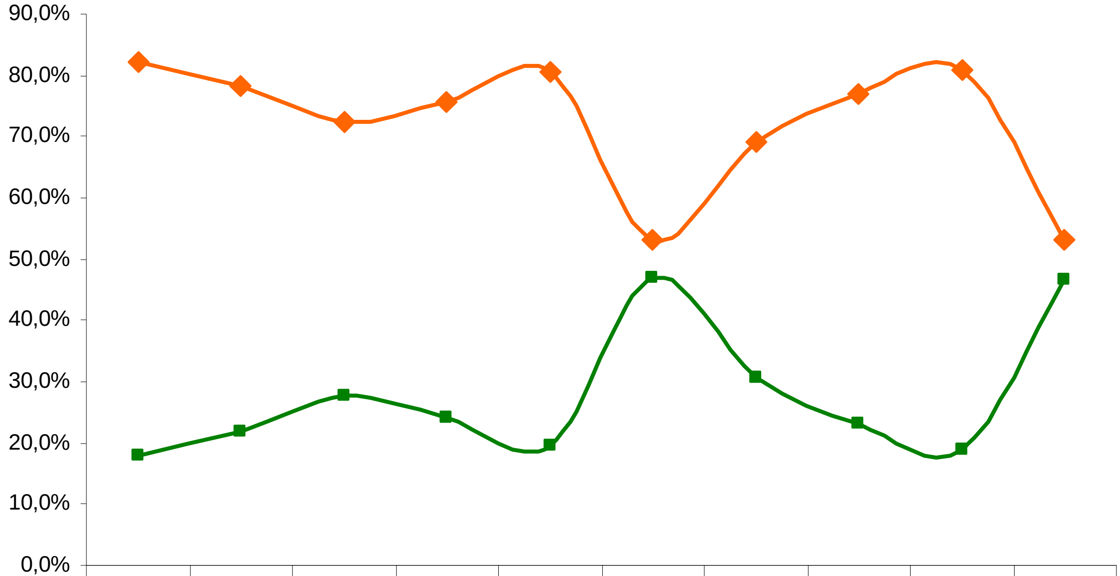
Betrachtet man jene Lernpfade, die von mehr als 50 Schüler/innen[64] absolviert wurden, so ergibt sich ein mindestens ebenso interessantes Bild. Dargestellt werden im folgenden Diagramm die Lernpfade:

1	Koordinatensystem und geometrische Grundbegriffe:	198 Schüler/innen
3	Dreiecke – Merkwürdige Punkte:	63 Schüler/innen
4	Pythagoras (3. Klasse):	242 Schüler/innen
5	Pythagoras im Raum (4. Klasse):	66 Schüler/innen
7	Beschreibende Statistik (4. Klasse):	199 Schüler/innen
8	Funktionen – Einstieg:	281 Schüler/innen
9	Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1:	104 Schüler/innen
10	Vektorrechnung in der Ebene, Teil 2:	56 Schüler/innen
11	Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung:	59 Schüler/innen
12	Einführung in die Differentialrechnung:	201 Schüler/innen

Unter „Zustimmung“ wurden jeweils die Schüler/innen, auf die die Aussage völlig bzw. eher zutrifft, und unter „Ablehnung“, jene, auf die die Aussage eher nicht bzw. gar nicht zutrifft, zusammengefasst.

[64] Also mindestens von zwei Schulklassen.

Der Sinn und die Bedeutung der neu erlernten Begriffe sind mir durch den Lernpfad klar geworden:



	1	3	4	5	7	8	9	10	11	12
Zustimmung	82,1%	78,1%	72,3%	75,8%	80,5%	53,0%	69,2%	76,8%	81,0%	53,3%
Ablehnung	17,9%	21,9%	27,7%	24,2%	19,5%	47,0%	30,8%	23,2%	19,0%	46,7%

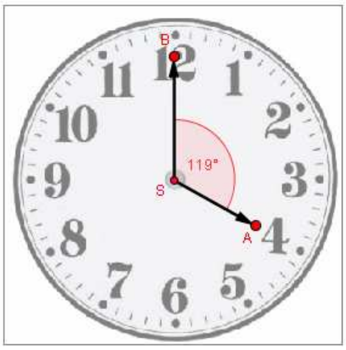
Zwei Lernpfade fallen im Bereich Zustimmung deutlich von den restlichen ab. Es handelt sich dabei um die Lernpfade „Funktionen – Einstieg“ (Zustimmung: 53%) und „Einführung in die Differentialrechnung“ (Zustimmung: 53,3%). Beide Lernpfade tragen zur Begriffsbildung bei, unterstützen diesen Prozess aber nicht mit Inhalten, die für Schüler/innen sinnstiftenden und bedeutungsvoll sind. Auch am Ende des Begriffsbildungsprozesses werden keine sinn- und bedeutungsgebenden Inhalte angeschlossen; somit können diese Lernpfade auch weniger zur Weltorientierung beitragen.

Im Gegensatz dazu gelingt es mit den Lernpfaden „Koordinatensystem und geometrische Grundbegriffe“ (Zustimmung: 82,1%), „Beschreibende Statistik“ (Zustimmung: 80,5%) und „Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (Zustimmung: 81,0%) sehr gut, den Schüler/innen Sinn und Bedeutung der neu erlernten Begriffe zu vermitteln. Ich denke, dies ermöglichen vor allem die in diesen Lernpfaden zur Begriffsbildung ausgewählten Aufgaben, denn sie stellen die Verbindung zwischen Mathematik und der übrigen Kultur her, insbesondere auch zu dem, was Schüler/innen aus ihrer Alltagswelt vertraut, bekannt und erfahrbar ist [Hey, S. 159].

Zentrale Ideen müssen nach H. W. Heymann „Schnittstellen zwischen Mathematik und der Gesamtkultur bezeichnen“ [Hey, S. 159].

Exemplarisch sei hier für jeden der drei Lernpfade eine solche Aufgabe/Übung veranschaulicht.

1. Koordinatensystem und geometrische Grundbegriffe



Bei der Aufgabe „Winkel am Ziffernblatt“[65] können die Schüler/innen die Punkte A und B bewegen, damit verschiedene Uhrzeiten einstellen und folgende Fragen beantworten:

- *Wann schließen die beiden Uhrzeiger einen spitzen, stumpfen bzw. erhabenen Winkel ein? Schreibe einige Beispiele (Uhrzeiten) auf.*
- *Welchen Winkel schließen die Zeiger um 12.00 Uhr, um 15.30 Uhr und um 11.10 Uhr ein? Stelle die Uhrzeit realistisch ein[66].*
- *Nicht jede Stellung der Uhrzeiger ist realistisch, z.B. großer Zeiger auf 4, kleiner Zeiger auf 12. Warum?*

2. Beschreibende Statistik

Bei der Begriffsbildung des Medians gibt es zwei Aufgabenstellungen[67] (ohne Multimedia-Komponente), die eine Schnittstelle zwischen der Mathematik und der Gesamtkultur – insbesondere der Welt der Schüler/innen – bilden.

(A) Stirnreihe

Du kennst bereits eine statistische Kennzahl, das arithmetische Mittel. Daneben gibt es noch andere Möglichkeiten, einen Mittelwert zu suchen:

---

[65] http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/geo_grundbegriffe/lernpfad/index.htm (gültig am 28.07.2007)

[66] Gemeint ist hier die Stellung der Zeiger.

[67] http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/beschreibendeStatistik/index.html (gültig am 28.07.2007)

In Turnen habt ihr sicher schon oft eine Stirnreihe gebildet und euch dazu der Größe nach aufgestellt. Wie würdest du vorgehen, wenn du ohne Maßband und möglichst rasch eine Person auswählen sollst, die den durchschnittlichen Schüler bzw. die durchschnittliche Schülerinnen in Hinblick auf die Körpergröße repräsentiert?

(B) Bleistifte

Nimm 7 Buntstifte und Bleistifte und lege sie vor dich hin. Sie sind hoffentlich schon benutzt und haben unterschiedliche Länge. Sortiere sie der Größe nach! Welcher Stift repräsentiert am besten die durchschnittliche Länge der Stifte? Beantworte die Frage ohne Messen und Rechnen!

Vergleiche deine Vorgangsweise mit folgender Festlegung:
Der **Median** (**Zentralwert**) ist jener Wert, der genau in der Mitte aller Werte liegt, wenn man sie der Größe nach ordnet.

Anders formuliert:
Höchstens die Hälfte der Werte ist kleiner als der Median (Zentralwert).
Höchstens die Hälfte der Werte ist größer als der Median (Zentralwert).
Bist du auch so vorgegangen?

3. Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung

Der Lernpfad „Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung“ beginnt mit folgender historischer Fragestellung, die zweifelsohne durch das eingebettete Ausprobieren und Spielen an eine den Schüler/innen vertraute Alltagswelt anschließt:

Wann entstand die Wahrscheinlichkeitsrechnung?


Fermat

Als eigentliche Geburtsstunde gilt das Jahr 1654, als sich der Chevalier de Méré, ein Philosoph und Literat am Hof Ludwig XIV., mit zwei Problemen an Blaise Pascal wandte. Ein interessanter Briefwechsel zwischen den Mathematikern Blaise Pascal und Pierre de Fermat folgte.


Pascal

Lasst euch in die Zeit des Chevalier de Méré zurückversetzen!

Chevalier de Méré, Philosoph, Literat und begeisterter Spieler, bat den damals berühmten Mathematiker Blaise Pascal um Hilfe bei der Lösung zweier Probleme, die ihn beschäftigten. Lest euch die beiden Fragen des Chevaliers durch und versucht in Partnerarbeit eine Antwort zu finden, die ihr in einer anschließenden Diskussion in der Klasse auch verteidigen sollt.

Frage 1:

Was ist wahrscheinlicher: Bei vier Würfen mit einem Würfel mindestens eine Sechs zu werfen oder bei 24 Würfen mit zwei Würfeln mindestens eine Doppelsechs?

Frage 2:

Eine Münze wird wiederholt geworfen. Für jedes Mal „Zahl“ erhält A einen Punkt und für jedes Mal „Kopf“ erhält B einen Punkt. Wer zuerst 5 Punkte erzielt, gewinnt den Einsatz.

Nach 7 Würfen hat A 4 Punkte und B 3 Punkte. Das Spiel wird abgebrochen.

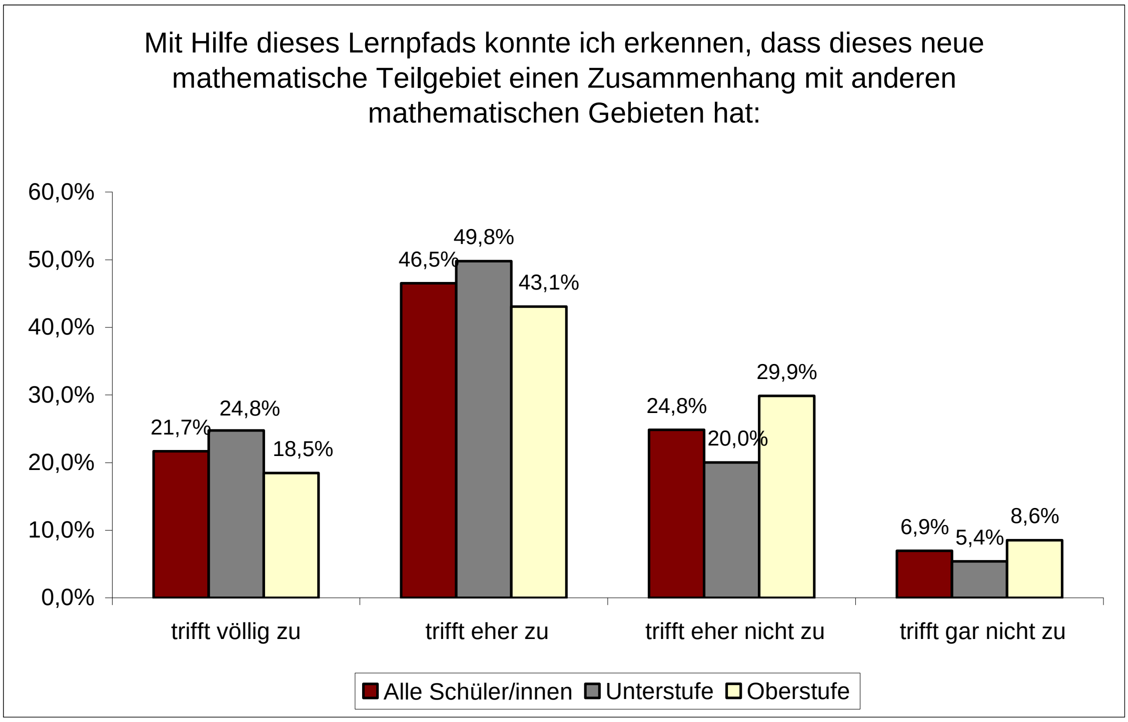
Welches ist die gerechte Aufteilung des Einsatzes: Nach Maßgabe der gewonnenen Spiele (also 4:3) oder nach Maßgabe der noch fehlenden Spiele (also 2:1) oder überhaupt nach anderen Gesichtspunkten?

Spielen und diskutieren

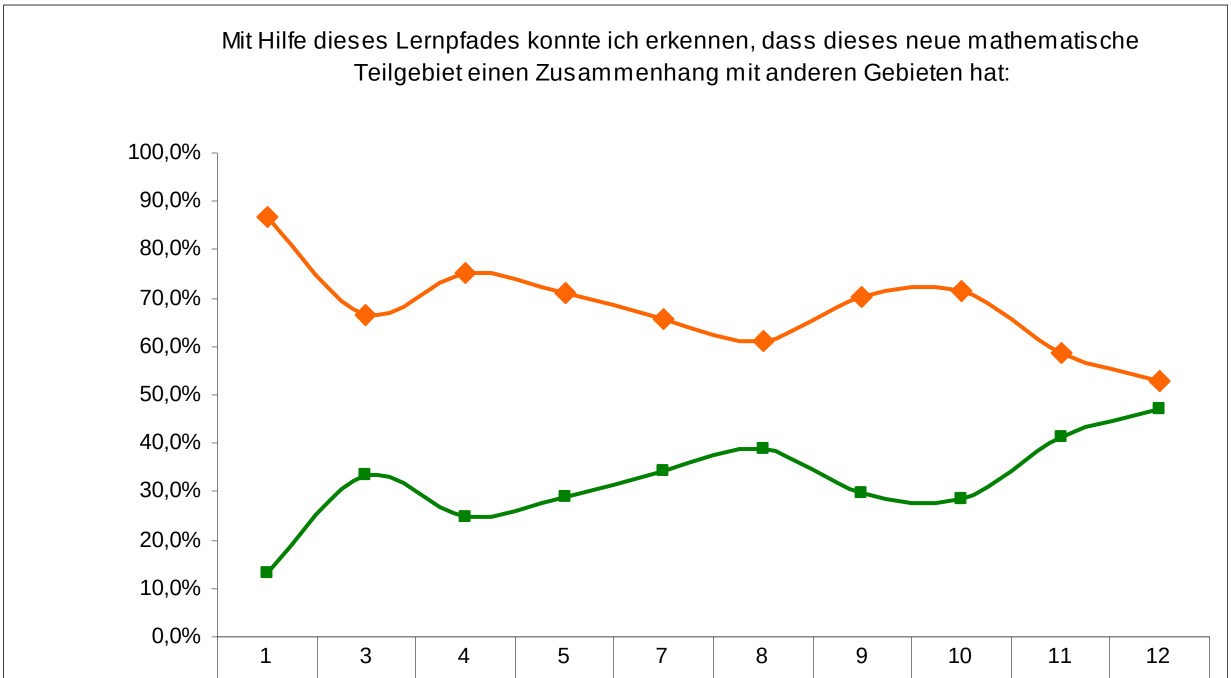
- Probiert die zwei Spiele in kleinen Gruppen aus!
- Formuliert einen Lösungsvorschlag.
- Haltet eure Lösungsvorschläge schriftlich fest und überlegt euch gute Argumente dafür, denn eure MitschülerInnen könnten anderer Meinung sein.
- Diskutiert entweder in der Klasse oder in einem Diskussionsforum, welcher Lösungsvorschlag die größte Zustimmung findet.

Welche Lösung ist richtig?

Auch beim zweiten Item „Mit Hilfe dieses Lernpfades konnte ich erkennen, dass dieses neue mathematische Teilgebiet einen Zusammenhang mit anderen mathematischen Gebieten hat" stimmen sehr viele Schüler/innen (68,2%) der Aussage völlig bzw. eher zu. Wie schon zuvor ist der Prozentsatz der Unterstufenschüler/innen, die dieser Aussage zustimmen, mit 74,6%, deutlich höher als jener der Oberstufenschüler/innen (61,6%).



Betrachtet man bei diesem Item wieder nur jene Lernpfade, die von mehr als 50 Schüler/innen absolviert wurden, so ergibt sich insgesamt mit fortschreitender Schulstufe eine Ablehnungstendenz.



	1	3	4	5	7	8	9	10	11	12
Zustimmung	86,7%	66,7%	75,2%	71,2%	65,6%	61,2%	70,2%	71,4%	58,6%	52,8%
Ablehnung	13,3%	33,3%	24,8%	28,8%	34,4%	38,8%	29,8%	28,6%	41,4%	47,2%

1 Koordinatensystem und geometrische Grundbegriffe
3 Dreiecke – Merkwürdige Punkte
4 Pythagoras (3. Klasse)
5 Pythagoras im Raum (4. Klasse)
7 Beschreibende Statistik (4. Klasse)
8 Funktionen – Einstieg
9 Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1
10 Vektorrechnung in der Ebene, Teil 2
11 Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung
12 Einführung in die Differentialrechnung

Negativer Ausreißer dieser Tendenz ist der Lernpfad „Dreiecke – merkwürdige Punkte“, positive Ausreißer sind die Lernpfade zur Vektorrechnung. Dass beim Lernpfad zu den merkwürdigen Punkten im Dreieck trotz der eigentlich zufrieden stellenden Ergebnisse von einem Drittel der Schüler/innen, die ihn evaluiert haben, die Aussage: „Mit Hilfe dieses Lernpfades konnte ich erkennen, dass dieses neue mathematische Teilgebiet einen Zusammenhang mit anderen mathematischen Gebieten hat“ abgelehnt wird, beruht auf der Tatsache, dass dieser Lernpfad sich eben ausschließlich mit dem von ihm angekündigten Thema befasst und darüber hinaus keine Querverbindungen zu anderen mathematischen Teilgebieten aufweist. Im Gegensatz dazu erlangt die obige Aussage bei den Lernpfaden zur Vektorrechnung breitere Zustimmung, da in diesen der Bezug und Zusammenhang zu anderen mathematischen Gebieten durch vieles gegeben ist.

Zum Beispiel durch:

- Koordinatensystem
- Rechenoperationen
- Satz von Pythagoras – Länge eines Vektors
- Parameterdarstellung einer Geraden
- Winkelberechnung

Insgesamt zeichnet sich ab, dass es vielen Ersteller/innenteams gelungen ist, mit ihrem Lernpfad einen Beitrag zur Stiftung kultureller Kohärenz und zur Weltorientierung zu leisten. Am Beispiel der Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung zeigt sich, dass es dafür aber nicht unabdingbar interaktive Multimedia-Komponenten braucht.

7.2.6.3 Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch

Merkmale einer allgemein bildenden Unterrichtskultur, die nach Heymann hohe Relevanz für die Allgemeinbildungsaufgabe „Anleiten zum Denken, Verstehen und kritischen Vernunftgebrauch" haben und im Schüler/innenfragebogen durch verschiedene Items abgedeckt wurden, sind neben den gerade vorher ausgeführten (auf deren nochmalige Nennung ich hier verzichte) auch die folgenden [Hey, S. 264]:

(1) „Das Verstehen mathematischer Sachverhalte wird ihrer technischen Beherrschung übergeordnet; es zeigt sich für den Lehrer nicht zuletzt daran, wieweit Schüler über das reflektieren können, was sie mathematisch tun"
(2) „Es gibt Raum für Umwege, ungewöhnliche Ideen, Offenheit für unterschiedliche Verläufe des Unterrichts"
(3) „Im Unterricht sind Neugier, Spannung, Engagement, Überraschung, Lust am Denken und mathematischen Tun nichts Ungewöhnliches"

Die folgenden zwei Items des Fragebogens decken das *erste* Merkmal ab:

(1a) Das Verstehen der mathematischen Inhalte war beim Bearbeiten dieses Lernpfades sehr wichtig.

Trifft gar nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft völlig zu
☐	☐	☐	☐

(1b) Beim Bearbeiten dieses Lernpfades gab es Gelegenheiten, über das mathematische Tun nachzudenken:

trifft gar nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft völlig zu
☐	☐	☐	☐

Beim *zweiten* hier angeführten Merkmal habe ich mich für den Fragebogen am entsprechenden Merkmal der „herkömmlichen Unterrichtskultur" – „Schülergedanken, die aus Sicht des Lehrers vom offiziellen Thema wegführen, werden nicht weitergeführt" – orientiert und folgende zwei Items in möglichst schüler/innengerechter Sprache gewählt.

(2a) Meine eigenen Gedanken wurden beim Erarbeiten der Inhalte dieses Lernpfades berücksichtigt:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft zum Teil zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐	☐

(2b) Das Erlernen der mathematischen Inhalte mit diesem Lernpfad habe ich als das Nachvollziehen eines fix vorgegebenen Weges empfunden:

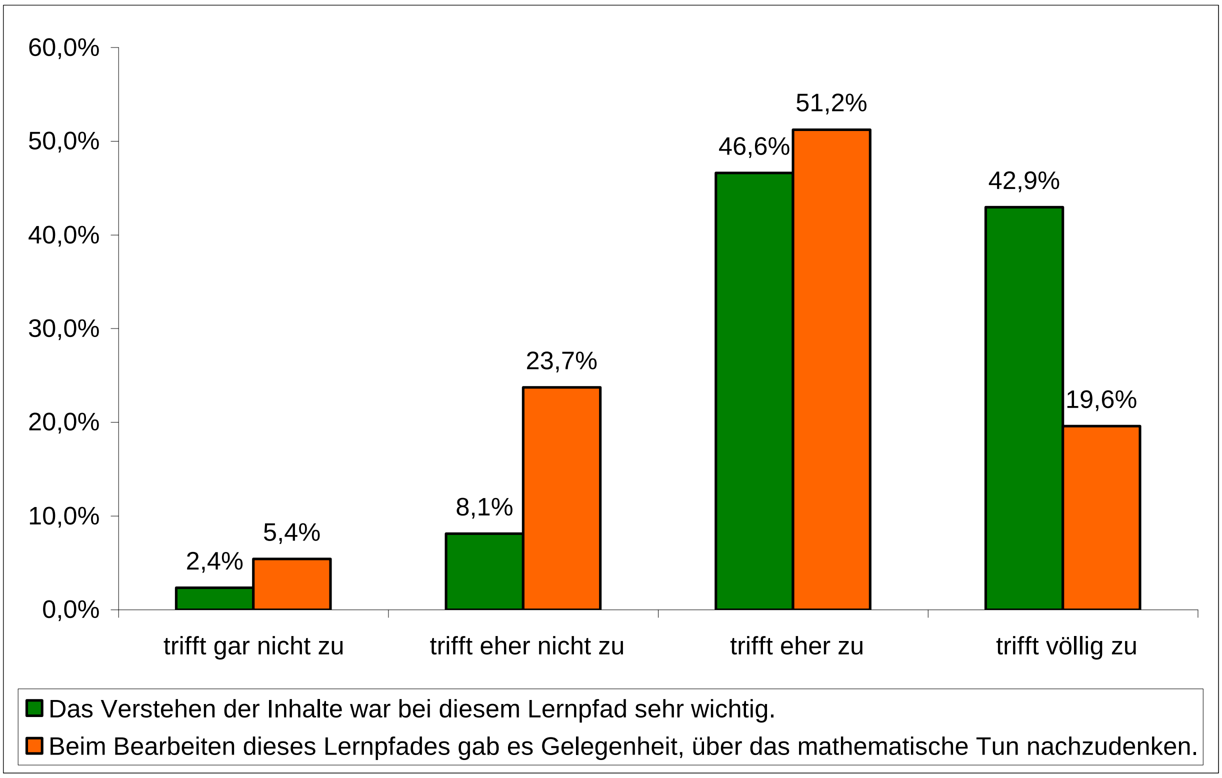
trifft gar nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft zum Teil zu	trifft eher zu	trifft völlig zu
☐	☐	☐	☐	☐

Das *dritte* Merkmal konnte ich fast in seiner ursprünglichen Formulierung für den Fragebogen übernehmen.

> (3) Ich habe diesen Lernpfad mit Neugier, Engagement sowie Lust am Denken und mathematischen Tun absolviert:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐

Ad (1) „Das Verstehen mathematischer Sachverhalte wird ihrer technischen Beherrschung übergeordnet; es zeigt sich für den Lehrer nicht zuletzt daran, wieweit Schüler über das reflektieren können, was sie mathematisch tun“

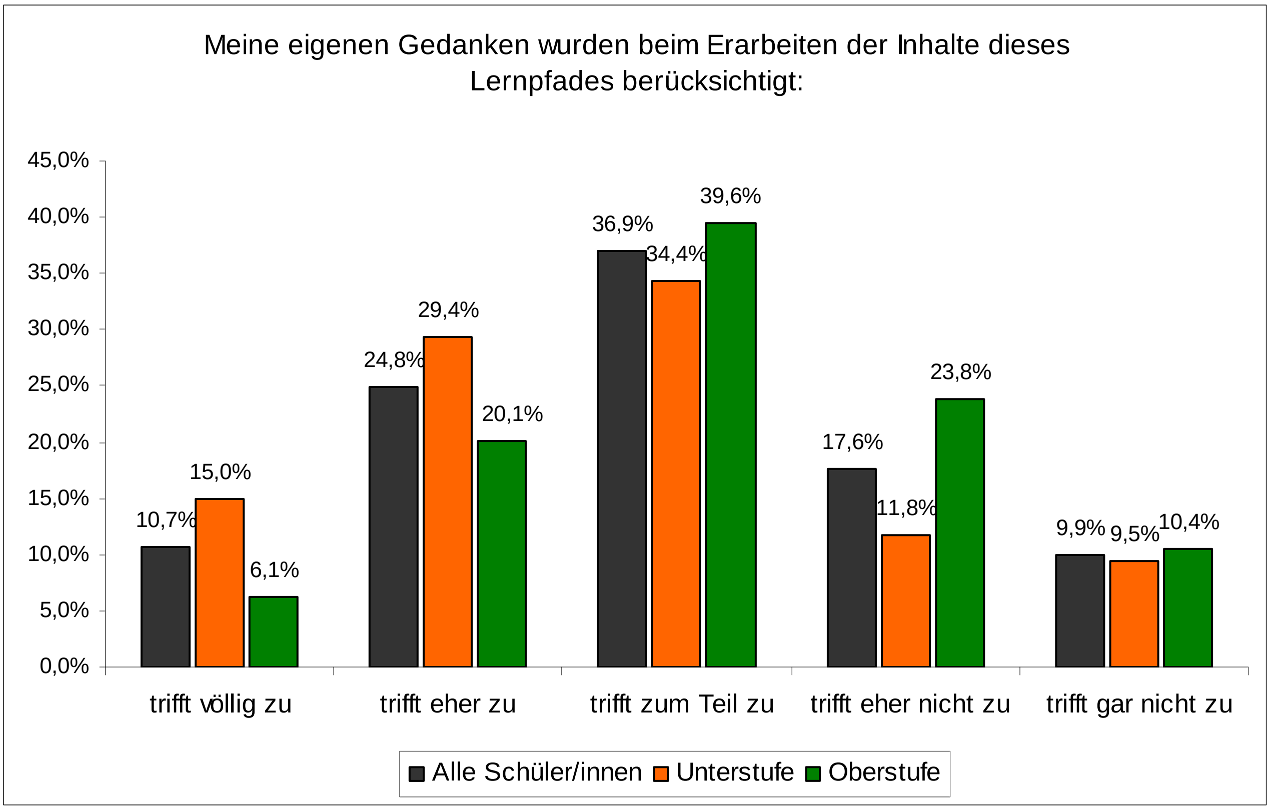


Wie die Grafik zeigt, stimmen 89,5% der Schüler/innen der Aussage: „Das Verstehen der Inhalte war diesem Lernpfad sehr wichtig“, völlig bzw. eher zu. 70,8% der Schüler/innen stimmen der Aussage: „Beim Bearbeiten dieses Lernpfades gab es Gelegenheit, über das mathematische Tun nachzudenken“, auch völlig bzw. eher zu. Insgesamt ist die Zustimmung bei beiden Items sehr hoch und es ist daher davon auszugehen, dass die Lernpfade die Schüler/innen zum kritischen Vernunftgebrauch anleiten.

Ad (2) „Es gibt Raum für Umwege, ungewöhnliche Ideen, Offenheit für unterschiedliche Verläufe des Unterrichts“

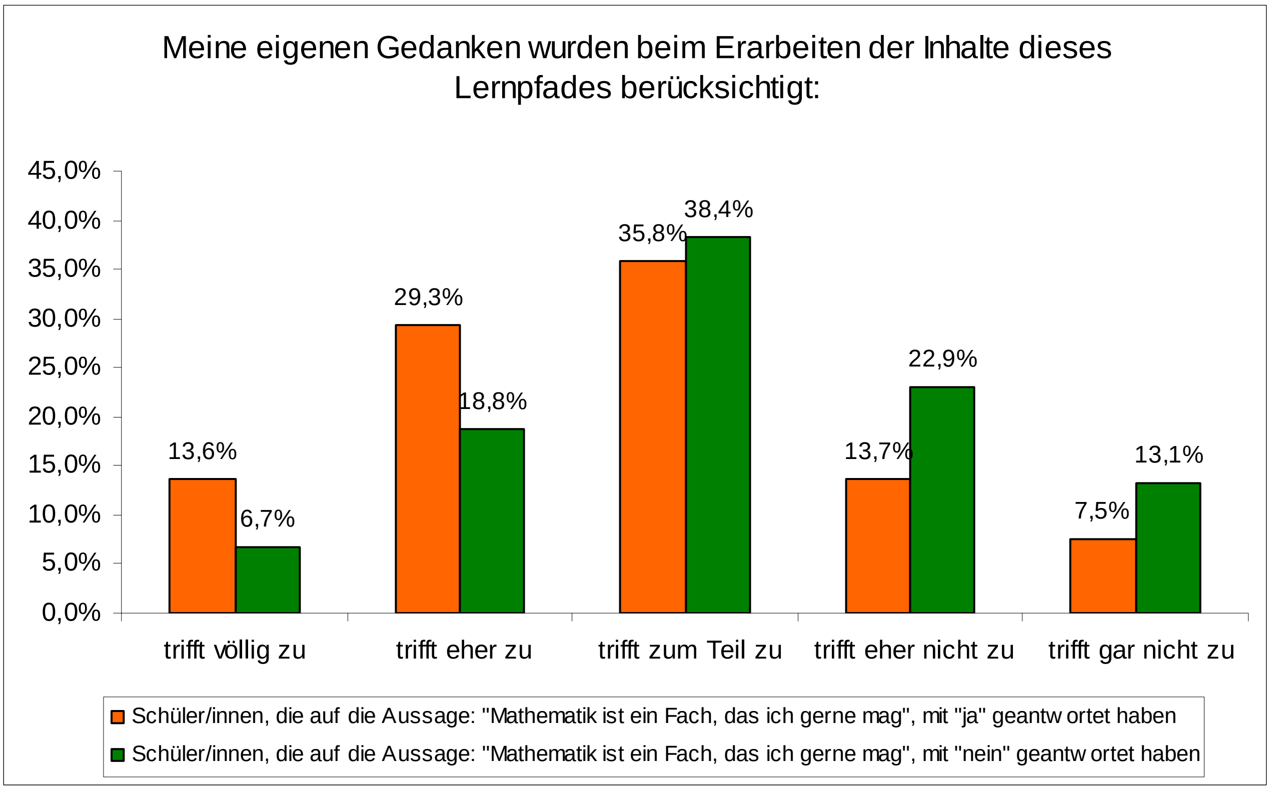
Werden im Unterricht die Gedanken der Schüler/innen beim Erarbeiten der Inhalte berücksichtigt, so ist dies ein Indiz für eine allgemein bildende Unterrichtskultur und spricht dafür, dass es Raum für Umwege, ungewöhnliche Ideen und Offenheit für unterschiedliche Verläufe des Unterrichts gibt.

Die Schüler/innen der Unterstufe und Oberstufe sind diesbezüglich allerdings geteilter Meinung. Insgesamt trifft auf 35,5% aller Schüler/innen die Aussage: „Meine eigenen Gedanken wurden beim Erarbeiten der Inhalte dieses Lernpfades berücksichtigt“, völlig bzw. eher zu. 27,5% aller Schüler/innen stimmen dieser Aussage eher nicht bzw. gar nicht zu. Etwas mehr als ein Drittel aller Schüler/innen tendiert bei dieser Aussage eher zur Mitte und meint, dass sie auf sie zum Teil zutrifft.

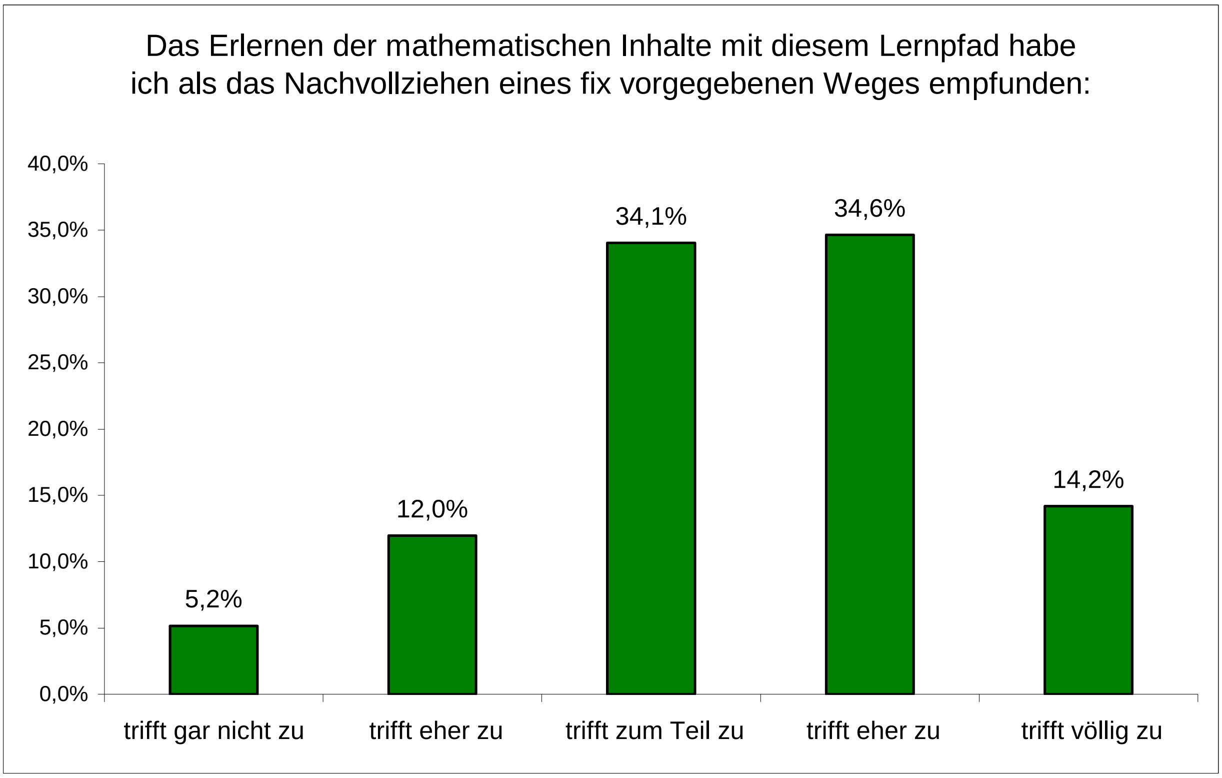


Weitaus mehr Schüler/innen der Unterstufe als in der Oberstufe (Unterstufe: 44,4%; Oberstufe: 26,2%) haben völlig bzw. eher das Gefühl, dass ihre eigenen Gedanken beim Erarbeiten der Inhalte dieses Lernpfades berücksichtigt wurden.

Rund ein Drittel der Schüler/innen (36%), die auf die Aussage: „Mathematik ist ein Fach, das ich gerne mag“, mit „nein“ geantwortet hat, trifft eher nicht bzw. gar nicht zu, dass ihre eigenen Gedanken beim Erarbeiten der Inhalte berücksichtigt wurden. Bei jenen Schüler/innen, die auf die Aussage: „Mathematik ist ein Fach, das ich gerne mag“, mit „ja“ geantwortet haben, sind es nur noch 21,2%. Hingegen haben 42,9%, dieser Schüler/innen völlig bzw. eher das Gefühl, dass ihre eigenen Gedanken beim Erarbeiten der Inhalte dieses Lernpfads berücksichtigt wurden.



Annähernd die Hälfte der Schüler/innen stimmt der Aussage: „Das Erlernen der mathematischen Inhalte mit diesem Lernpfad habe ich als das Nachvollziehen eines fix vorgegebenen Weges empfunden“ eher bzw. völlig zu, 34,1% stimmen nur zum Teil zu und 17,2% der Schüler/innen lehnen diese Aussage eher bzw. ganz ab.



Diese Ergebnisse weisen relativ deutlich daraufhin, dass die Schüler/innen den linearen Aufbau der Lernpfade und die didaktische Vorsortierung der Inhalte als fix vorgegebenen Weg empfinden.

Insgesamt lassen die obigen Daten zwei Interpretationsansätze zu:

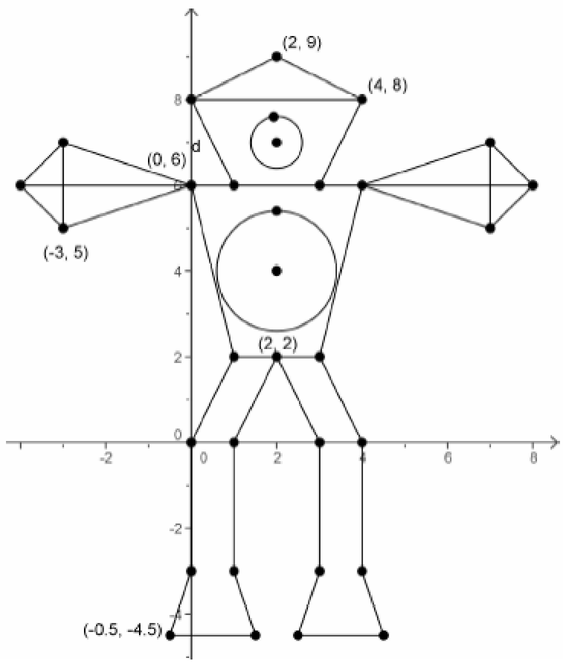
1. Die Lernpfade erlauben trotz ihres spürbaren linearen Aufbaus und der didaktischen Vorsortierung der Inhalte bis zu einem gewissen Maß die Berücksichtigung der Schüler/innengedanken. Dabei scheinen die Lernpfade für die Unterstufe eher dazu prädestiniert zu sein als jene für die Oberstufe. Meines Erachtens ist dafür vor allem der „Freiheitsgrad“ bei den Aufgabenstellungen und interaktiven Multimedia-Komponenten ausschlaggebend, was ich anhand der nachfolgenden Beispiele exemplarisch belegen werde.

   a) „Roboter“

   Beim Lernpfad „Koordinatensysteme und geometrische Grundbegriffe“ (6. Schulstufe) haben die Schüler/innen eine Aufgabe mit dem Titel „Roboter“ zu absolvieren. Die Aufgabenstellung lautet[68]:

[68] http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/geo_grundbegriffe/lernpfad/content/roboter_arbeitsblatt.pdf (gültig am 30.07.2007)

„Öffne GeoGebra und zeichne diesen Roboter. Zeichne dazu zuerst alle Punkte ein und verbinde dann diese Punkte durch Strecken. Versuche dabei, einzelne Punkte und Strecken auch direkt einzugeben, z.B.: B=(2,9) oder Strecke[A,B] (wenn A und B bereits eingegeben sind).



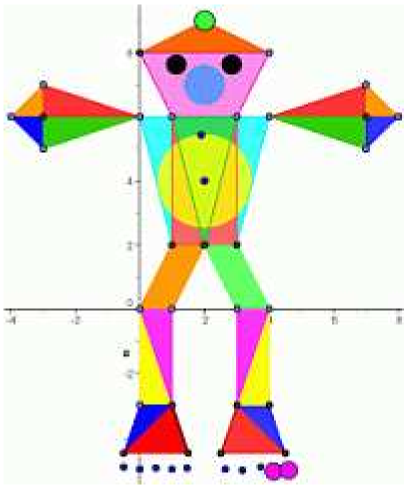
Vervollständige auf dem Arbeitsblatt die fehlenden Koordinaten (x,y) der Punkte für deinen Roboter (ohne Bezeichnungen).

Weitere Aufgaben:

- *Lasse dir in GeoGebra die Werte der einzelnen Koordinaten anzeigen und kontrolliere so, ob du am Arbeitsblatt alle Koordinaten richtig eingetragen hast.*
- *Blende am Ende alle Bezeichnungen von Punkten und Strecken aus.*
- *Male einzelne Teile an (Vielecke).*
- *Blende auch „störende" Punkte aus und belasse nur die Linien auf dem Bildschirm.*

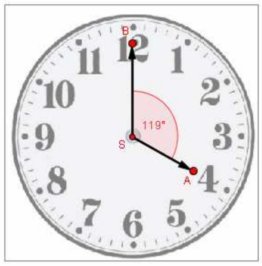
So machst du das: Rechtsklick auf den Punkt oder die störende Linie, dann Objekt anzeigen weghaken"

Vor allem das Anmalen einzelner Roboterteile, für das selbstständig Vielecke zu wählen sind und der Roboter dafür in Flächen zerlegt werden muss sowie das Ausblenden „störender“ Punkte kann die Schüler/innen zu eigenen Gedanken und Lösungswegen anregen. Die vielfältigen Ergebnisse dieser Aufgabe seien hier an einem Beispiel demonstriert.



b) „Winkel am Ziffernblatt“

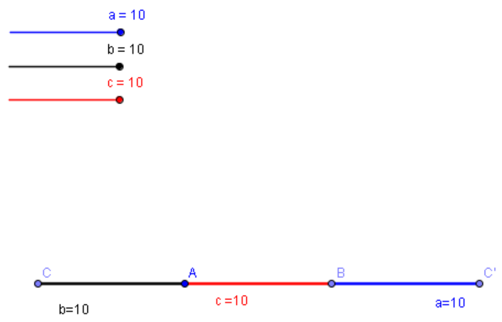
Die bereits im Abschnitt 7.2.6.2 beschriebene Aufgabe, gewährt den Schüler/innen einen überaus hohen Freiheitsgrad beim Experimentieren mit den Uhrzeigern. Es bleibt allein den Schüler/innen überlassen, welche spitzen, stumpfen oder erhabenen Winkel sie mit den Uhrzeigern erzeugen. Damit ist in hohem Ausmaß sichergestellt, dass Schüler/innen hier ihre eigenen Gedanken beim Erarbeiten der Inhalte einbringen können.



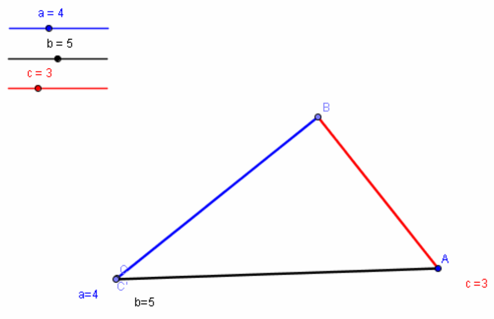
c) „Drei Seiten – ein Dreieck?“

Mit dieser dynamischen GeoGebra-Komponente aus dem Lernpfad „Kongruenz – vermuten, erklären, begründen“ können die Schüler/innen erforschen, unter welchen Bedingungen sie aus der Angabe von drei Seitenlängen eindeutig ein Dreieck konstruieren können.

Ausgangssituation



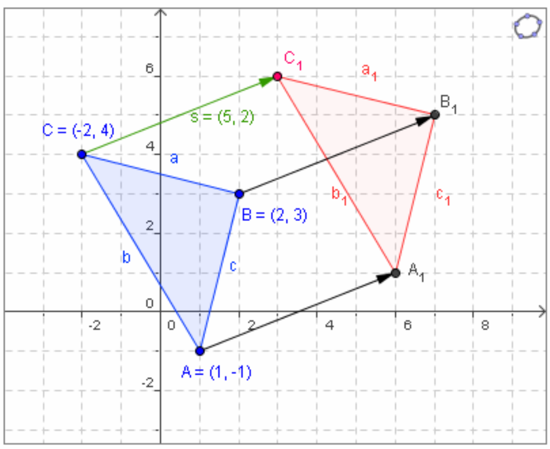
Ein mögliches Ergebnis



Auch hier wird den Schüler/innen beim Erforschen und Entdecken ein hoher Freiheitsgrad gewährt.

d) „Schiebung“

Die ebenfalls mit GeoGebra erzeugte Übung zur Schiebung[69] im Lernpfad „Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1“ gestattet den Schüler/innen kaum Freiheit beim Arbeiten.



©A. Lindner 2005, erstellt mit GeoGebra

Aufgabe:

Verändere die Eckpunkte A, B oder C des gegebenen Dreiecks oder den Vektor $\vec{s}$, der die Schiebung festlegt!

Übung:

Stelle die Koordinaten A(-1/-2), B(2/4) und C(-3/5) sowie den Schiebevektor $\vec{s}$ = (7, 1) ein!

Wie lauten die Koordinaten des Dreiecks $A_1B_1C_1$?

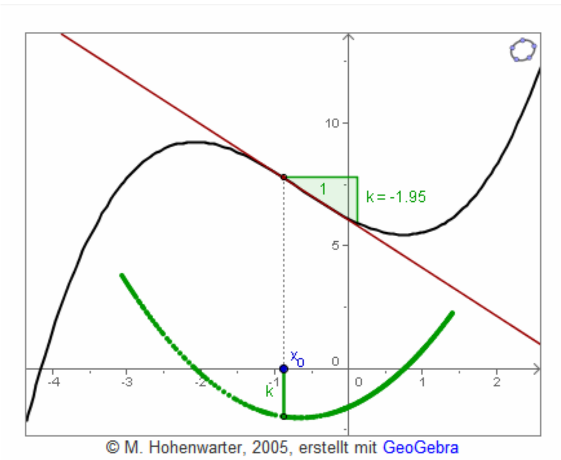
Berechne weiters den Umfang der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$!

[69] http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/Vektoren1/lernpfad/MV_Vektor1/sites/Schiebung.htm (gültig am 31.07.2007)

Eigene Gedanken sind hier nicht gefordert, es genügt, die gewünschten Einstellungen vorzunehmen und danach die Koordinaten einfach abzulesen. Die Berechnung der Dreiecksumfänge erscheint mir in dieser Aufgabe überhaupt redundant.

e) „Ableitung“

Dass der Lernpfad „Einführung in die Differentialrechnung“ viele interaktive GeoGebra-Dateien enthält, die von den Schüler/innen als hilfreich beim Verstehen empfunden wurden, habe ich bereits im Abschnitt 7.2.4.6 dargestellt. Dass diese nicht vorbehaltlos dazuführen, dass Schüler/innen ihre eigenen Gedanken einbringen können, vermag das nächste Beispiel[70] zu demonstrieren:



Die Aufgabe zu dieser Komponente lautet:

„Ziehe im rechten Fenster die Stelle ***x_0****. Dabei hinterlässt der Punkt* ***(x_0, f’(x_0))*** *eine Spur: den Graph der Steigungsfunktion bzw. der Ableitung* ***f’(x)****.“*

Mit dieser Aufgabenstellung ist alles gesagt und es gibt für die Schüler/innen nichts mehr zu verändern. Es ist also gar nicht nötig, wirklich eigene Gedanken beim Erarbeiten des Inhalts einzubringen.

Die obigen Beispiele zeigen auch, dass interaktive Komponenten den Schüler/innen einerseits zwar beim Verstehen helfen können, andererseits aber nicht immer dazu beitragen, eigene Gedanken einzubringen. Dies können nur jene Komponenten, die den Schüler/innen Freiheit beim Entdecken lassen und die Inhalte nicht sofort – fix und fertig – präsentieren.

[70] http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/diff_einfuehrung/lernpfad/content/07_ableitung.htm (gültig am 31.07.2007)

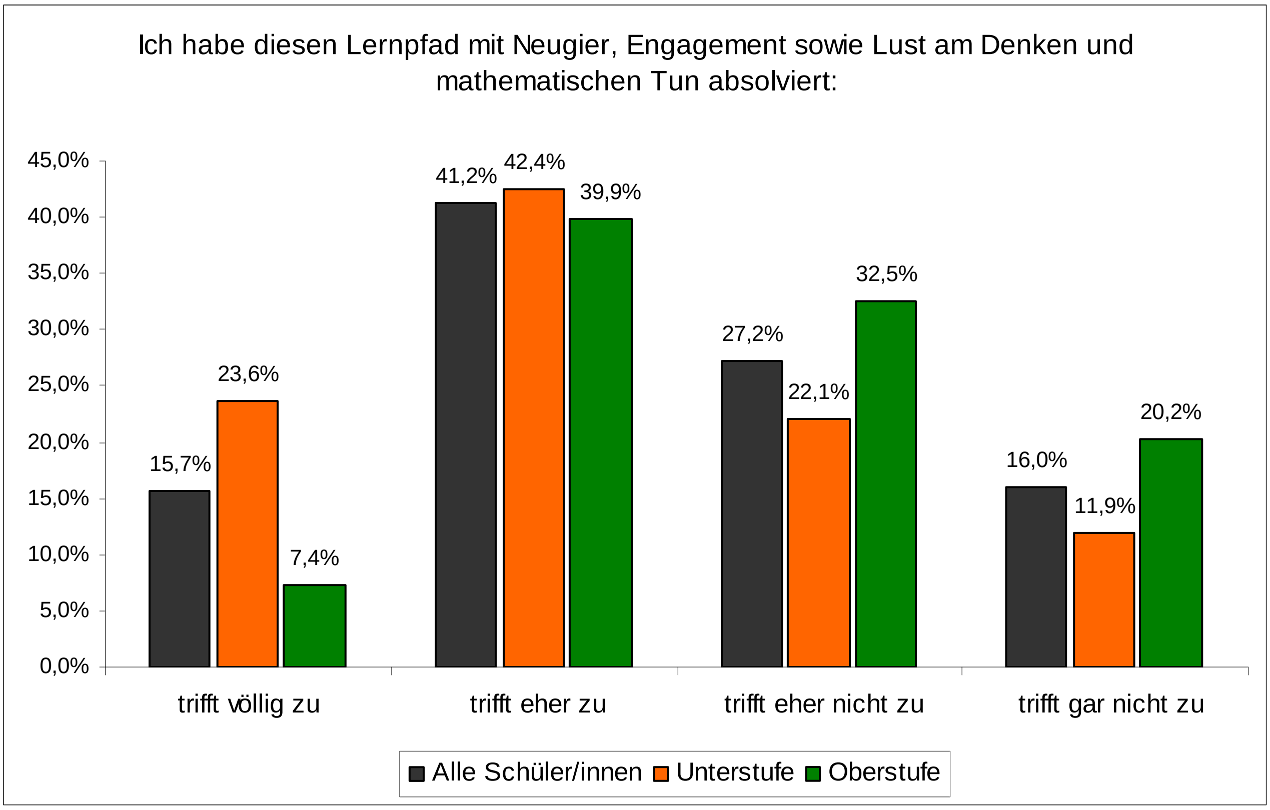
Nun noch kurz, wie oben angekündigt, zum zweiten Interpretationsansatz:

2. Schüler/innen, für die Mathematik ein Fach ist, das sie gerne mögen, finden anscheinend leichter Wege, ihre eigenen Gedanken beim Erarbeiten der Inhalte mit diesen Lernpfaden einzubringen. Möglicherweise liegt das daran, dass diese Schüler/innen mit mehr Selbstvertrauen an die Inhalte herangehen. Ähnliches ist ja auch schon bei Heymann zu lesen, er geht davon aus, dass die Motivation, mit der Schüler/innen an Aufgaben herangehen, von der Vorstellung ihrer eigenen Intelligenz abhängt [Hey, S. 97].

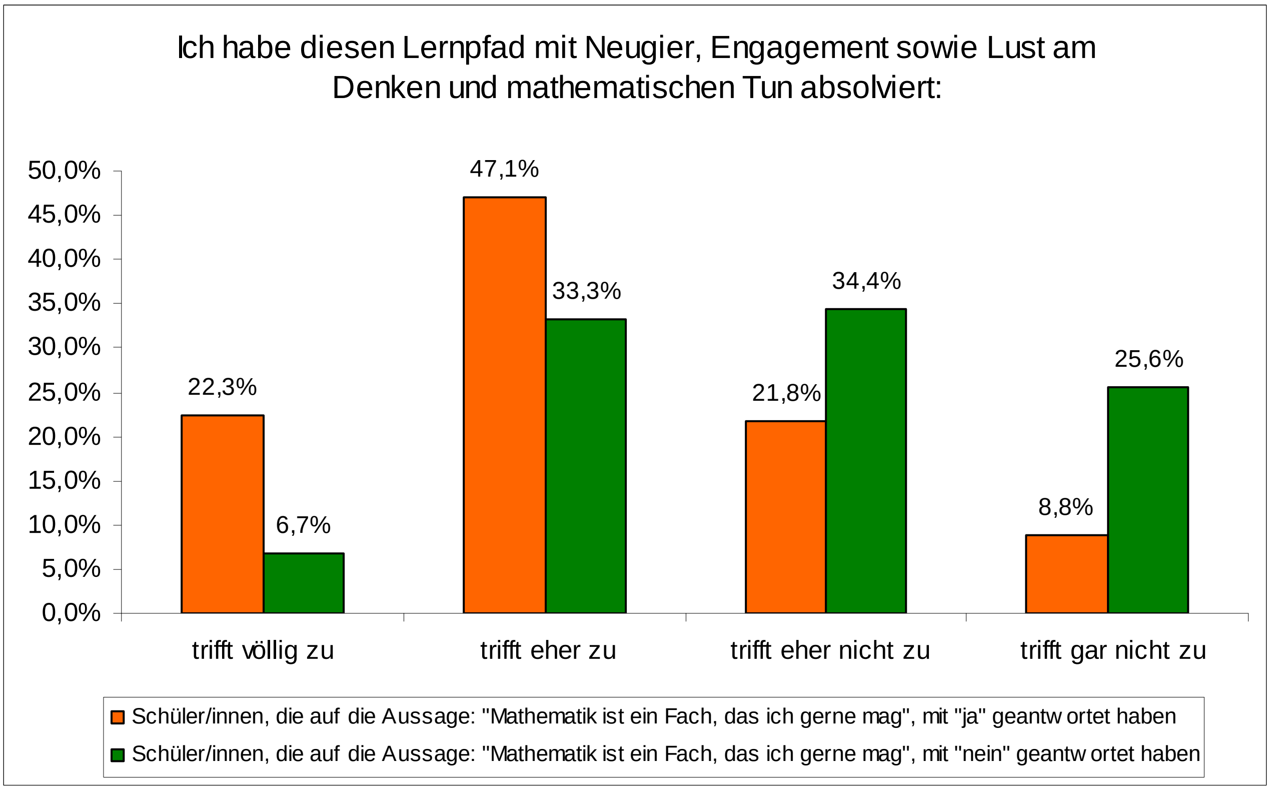
Kommen wir nun zum dritten Merkmal des Mathematikunterrichts, das gleichfalls hohe Relevanz für die Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch hat.

Ad (3) „Im Unterricht sind Neugier, Spannung, Engagement, Überraschung, Lust am Denken und mathematischen Tun nichts Ungewöhnliches“

Im Großen und Ganzen sind die Ergebnisse dieses Items erfreulich, für 56,9% aller Schüler/innen trifft es völlig bzw. eher zu, dass sie den Lernpfad mit Neugier, Engagement sowie Lust am Denken und mathematischen Tun absolviert haben. Enorme Divergenzen bzgl. dieses Items gibt es wiederum bei den Unter- und Oberstufenschüler/innen. Zwei von drei Unterstufenschüler/innen stimmen der Aussage völlig bzw. eher zu, hingegen können nur noch 47,3% der Oberstufenschüler/in dieser Aussage völlig bzw. eher zustimmen. D. h. ein wenig mehr als die Hälfte der Oberstufenschüler/innen geht nicht bzw. eher nicht mit Neugier, Engagement sowie Lust am Denken und mathematischen Tun an die Lernpfade heran.

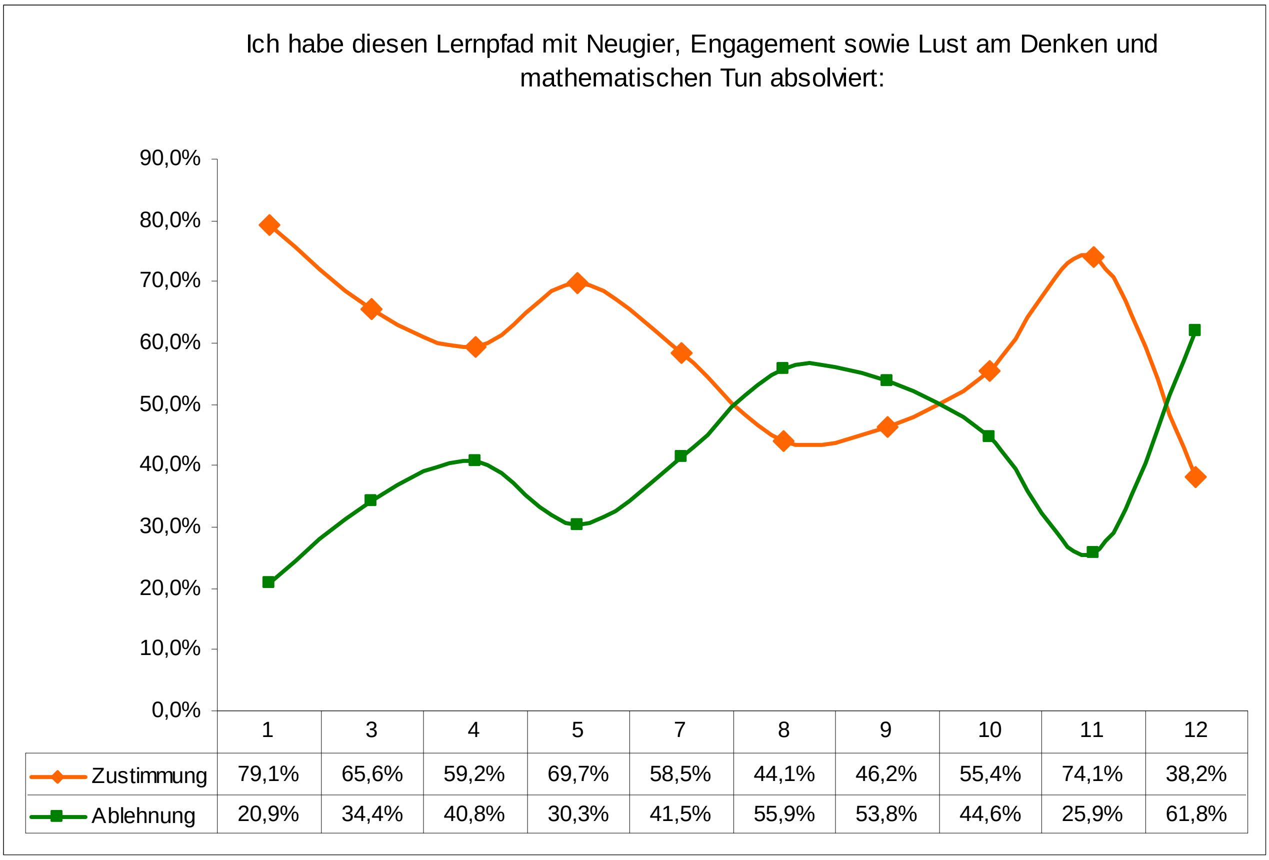


Dass sich im Zusammenhang mit diesem Item auch die Mathematikaffinität auswirkt ist selbstverständlich. Fast 70% der Schüler/innen, für die Mathematik ein Fach ist, das sie mögen, absolvierten den Lernpfad mit Neugier und Engagement, hingegen sagen 60% der Schüler/innen, für die Mathematik ein Fach ist, das sie nicht mögen, dass sie den Lernpfad eher nicht bzw. gar nicht mit Neugier, Engagement sowie Lust am Denken und mathematischen Tun absolviert haben.



Tatsache ist also, dass Neugier, Engagement sowie Lust am Denken und mathematischen Tun mit zunehmender Schulstufe abnehmen und auch diese innovative Unterrichtsform kaum dagegen ankommt. Ein interessantes Bild liefern hier auch wieder jene Lernpfade, die von mehr als 50 Schüler/innen evaluiert wurden.

Einerseits wird das obige Ergebnis bestätigt, andererseits aber werden auch positive und negative Ausreißer deutlich. Als positive Ausreißer präsentieren sich die Lernpfade „Pythagoras im Raum“ (Nr. 5) und „Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung“ (Nr. 11). Die Lernpfade „Funktionen – Einstieg“ (Nr. 8), „Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1“ (Nr. 9) und „Einführung in die Differentialrechnung“ (Nr. 12) weichen deutlich vom Trend ab und weisen in diesem Zusammenhang überhaupt die schlechtesten Ergebnisse auf.



	1	3	4	5	7	8	9	10	11	12
Zustimmung	79,1%	65,6%	59,2%	69,7%	58,5%	44,1%	46,2%	55,4%	74,1%	38,2%
Ablehnung	20,9%	34,4%	40,8%	30,3%	41,5%	55,9%	53,8%	44,6%	25,9%	61,8%

1	Koordinatensystem und geometrische Grundbegriffe	8	Funktionen – Einstieg
3	Dreiecke – Merkwürdige Punkte	9	Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1
4	Pythagoras (3. Klasse)	10	Vektorrechnung in der Ebene, Teil 2
5	Pythagoras im Raum (4. Klasse)	11	Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung
7	Beschreibende Statistik (4. Klasse)	12	Einführung in die Differentialrechnung

Da ich schon viele positive Elemente des Lernpfads zur Einführung in die Wahrscheinlichkeit beschrieben habe, die auch hier wieder anzuführen wären, möchte ich nun eines aus dem Lernpfad „Pythagoras im Raum“ [71] vorstellen, das zudem eine interaktive Multimedia-Komponente auf Stufe IV enthält.

[71] Dieser Lernpfad ist derzeit nur auf der CD-Version verfügbar.

Suche nach rechtwinkeligen Dreiecken

In nachfolgenden Übungen musst du dich auf die Suche nach rechtwinkeligen Dreiecken machen, die dir bei der Bestimmung der Länge einer rot eingezeichneten Strecke helfen können. Diese Dreiecke sollst du dann mit dem Werkzeug *gefülltes Vieleck* einzeichnen. Erst wenn du eine Aufgabe vollständig erledigt hast, bekommst du vom Programm eine kurze Rückmeldung. Für den Fall dass du nicht mehr weiter kommst, gibt es auch einen Link zur Lösung.

Quader

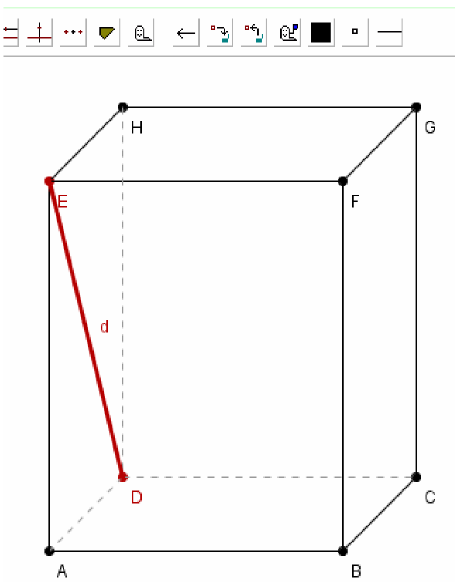
- Kantenlänge
- Höhe
- Flächendiagonale Übung 1, Übung 2
- Raumdiagonale

Pyramide

- Länge der Seitenkante
- Höhe einer Seitenfläche
- Höhe

Auf der Suche nach rechtwinkeligen Dreiecken zur Bestimmung gesuchter Längen in Quader und Pyramide stehen den Schüler/innen die im Folgenden beschriebenen Multimedia-Komponenten zur Verfügung. Das „Werkzeug“, das die Schüler/innen verwenden sollen, heißt „Gefülltes Vieleck“ und ermöglicht das Zeichnen beliebiger Vielecke.

Quader

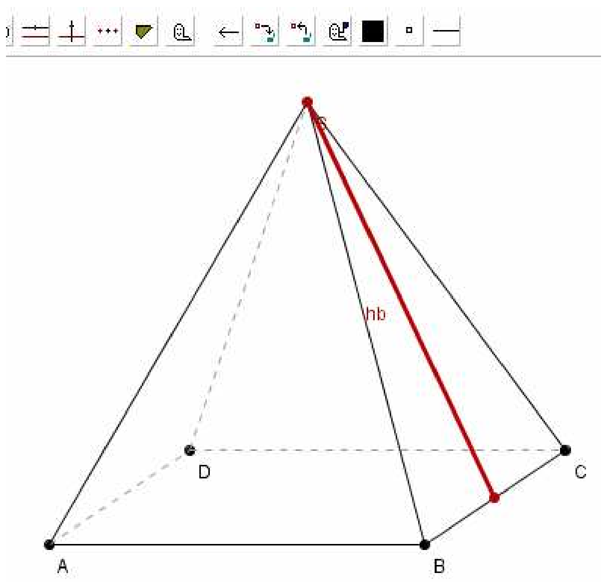


Aufgabe:

Gegeben sind die Länge der Kante AB sowie die Längen aller Raumdiagonalen des Quaders. Gesucht ist die Länge der rot eingezeichneten Flächendiagonale d.

Verwende das Werkzeug „Gefülltes Vieleck“, um all jene rechtwinkeligen Dreiecke einzuzeichnen, die dir bei dieser Aufgabe nützlich sein könnten!

Pyramide



Aufgabe:

Gegeben sind die Länge der Kante AB sowie die Höhe der Pyramide. Gesucht ist die rot eingezeichnete Höhe h_b der Seitenfläche BCS.

Verwende das Werkzeug „Gefülltes Vieleck“, um all jene rechtwinkeligen Dreiecke einzuzeichnen, die dir bei dieser Aufgabe nützlich sein könnten!

Diese Aufgabe ermöglicht den Schüler/innen selbstständiges Arbeiten und Entdecken und kann ein Parameter dafür sein, diesen Lernpfad mit Neugier, Engagement sowie Lust am Denken und mathematischen Tun zu absolvieren.

7.2.6.4 Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft

Bei der Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft im Mathematikunterricht ist Heymann wichtig, dass neben einer allgemeinen Hilfsbereitschaft und dem Bemühen darum, das in der Regel eher nicht in den Fachunterricht integriert ist, fachliches Lernen so gestaltet wird, dass damit die Verantwortungsbereitschaft der Schüler/innen gestärkt wird [Hey, S. 250 ff.]. Im Mathematikunterricht eignen sich zur Entfaltung verantwortlichen Handelns auf Mitschüler/innen und den eigenen Lernprozess bezogen beispielsweise „Oasen selbstbestimmten Lernens" [Hey, S. 257]. Solche Oasen können beim Absolvieren von Lernpfaden entstehen. Dass den Schüler/innen mit den Lernpfaden verantwortliches Handeln bezüglich ihres eigenen Lernprozesses ermöglicht wird, haben die Evaluationsergebnisse im Abschnitt 7.2.6.1 gezeigt, da 86,1% aller Schüler/innen angaben, dass es auf sie völlig bzw. eher zutrifft, dass sie beim Erlernen der Inhalte mit diesem Lernpfad selbst für ihren Lernfortschritt und Lernprozess verantwortlich waren.

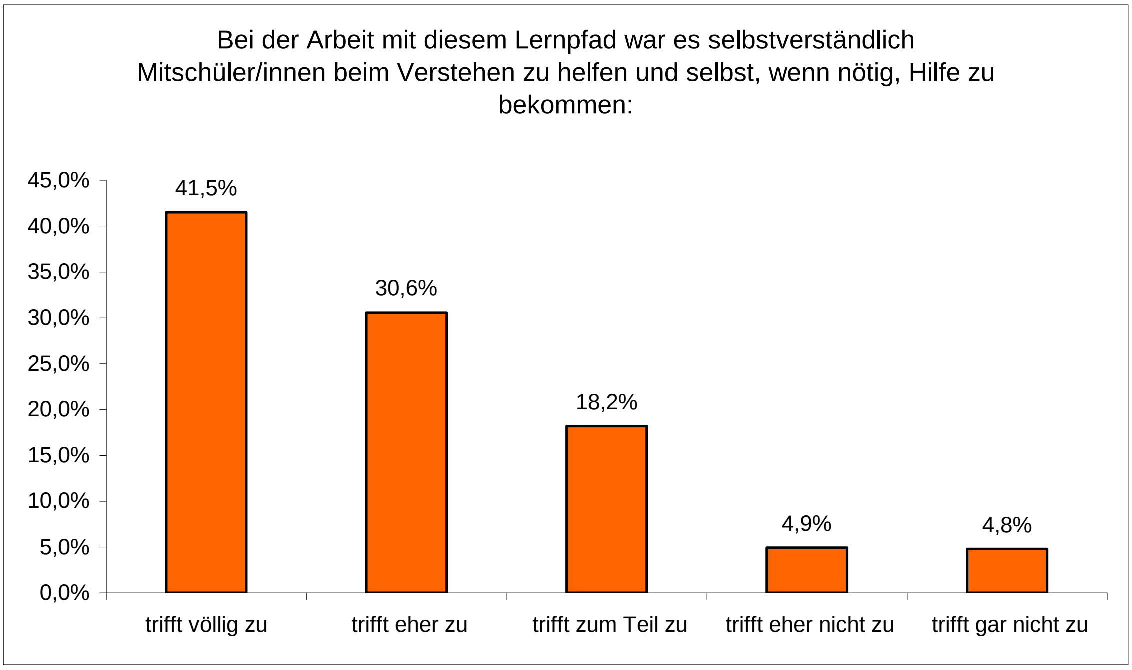
Am Merkmal „*Es ist selbstverständlich Mitschülern beim Verstehen zu helfen und sich selbst, wenn nötig, helfen zu lassen*" [Hey, S. 266] zeigt sich die Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft auf Mitschüler/innen bezogen.

Für den Schüler/innenfragebogen habe ich dazu folgendes Item entworfen:

> Bei der Arbeit mit diesem Lernpfad war es selbstverständlich Mitschüler/innen beim Verstehen zu helfen und selbst, wenn nötig, Hilfe zu bekommen.

Trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft zum Teil zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐	☐

Die Ergebnisse bestätigen, dass es für einen Großteil der Schüler/innen selbstverständlich war, beim Arbeiten mit den Lernpfaden Hilfe zu geben und zu empfangen. Für 72,1% der Schüler/innen trifft diese Aussage völlig bzw. eher zu, für weitere 18,2% zum Teil und nur 9,7% lehnen diese Aussage eher bzw. völlig ab.



Dieses Hilfegeben und Empfangen wurde von vielen Schüler/innen positiv wahrgenommen und daher möchte ich zur Verstärkung dieser Zahlen einige Zitate, die die Schüler/innen unter die Rubrik „Gut gefallen hat mit“ eingeordnet haben, anführen:

- „das wir zu zweit an einem computer waren (jedenfalls haben wir das so gemacht) und so ist es mir leichter gefallen!!!!“
- „das wir am PC gearbeitet haben und das wir alle zusammen geholfen haben wenn jemand ein Problem hatte! Es stärkte den Gemeinschaftssinn!!!!“
- „das selbstständige und gemeinsame Arbeiten; man hat viel zusammengearbeitet; und immer den Lehrer im Hilfe bitten können“
- „Mir hat gefallen, dass man mit den Mitschüler/innen viel reden konnte und alle sehr hilfsbereit waren jemand nicht gleich kapiert hat!! Hat die Gemeinschaft gestärkt!“
- „Das wir uns gegenseitig helfen konnten“
- „dass wir nicht alles allein machen mussten und uns gegenseitig geholfen haben“

- „selbständiges arbeiten und die Hilfeleistungen untereinander“

Für die Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft ist der Einsatz von Computern im Mathematikunterricht nicht unbedingt nötigt, allerdings haben die Lernpfade eine Unterrichtskultur gefördert, in der die Schüler/innen gerne Verantwortung für sich, ihren Lernprozess und ihre Mitschüler/innen übernehmen.

7.2.6.5 Einübung in Verständigung und Kooperation

In unserer demokratischen Gesellschaft hat die Verständigung zwischen Experten/Expertinnen und Laien/Laiinnen, somit also auch die Einübung in Verständigung und Kooperation, enorme Bedeutung. Zwei der vorhergehenden Items weisen bereits hohe Relevanz für diese Aufgabe auf. Eines ist das eben zuvor ausgeführte Merkmal „*Es ist selbstverständlich Mitschülern beim Verstehen zu helfen und sich selbst, wenn nötig, helfen zu lassen*“, das zweite schon von mir ausgeführte Merkmal „*Es gibt immer wieder Gelegenheit, gemeinsam mit anderen an Probleme heranzugehen, sich über Ziele und Strategien zu verständigen, wechselseitig Schwächen auszugleichen und Stärken zu bündeln (Partner- und Gruppenarbeit)*“ ordnet Heymann auch der Lebensvorbereitung zu und die diesbezüglichen Ergebnisse habe ich dort vorgestellt.

Nun gibt es aber zumindest noch zwei weitere Merkmale einer allgemein bildenden Unterrichtskultur, die hohe Relevanz für die Einübung in Verständigung und Kooperation aufweisen und von mir in den Fragebogen der Schüler/innen aufgenommen worden sind.

(1) „Schüler kommunizieren direkt miteinander“ [Hey, S. 264 f.]
(2) „Mathematiklernen wird häufig als ein Erkundungsprozeß erfahren, der allein oder gemeinsam mit anderen in intensivem Austausch von Ideen und Argumenten vollzogen werden kann“ [Hey, S. 264 f.]

Die Items des Fragebogens dazu lauten:

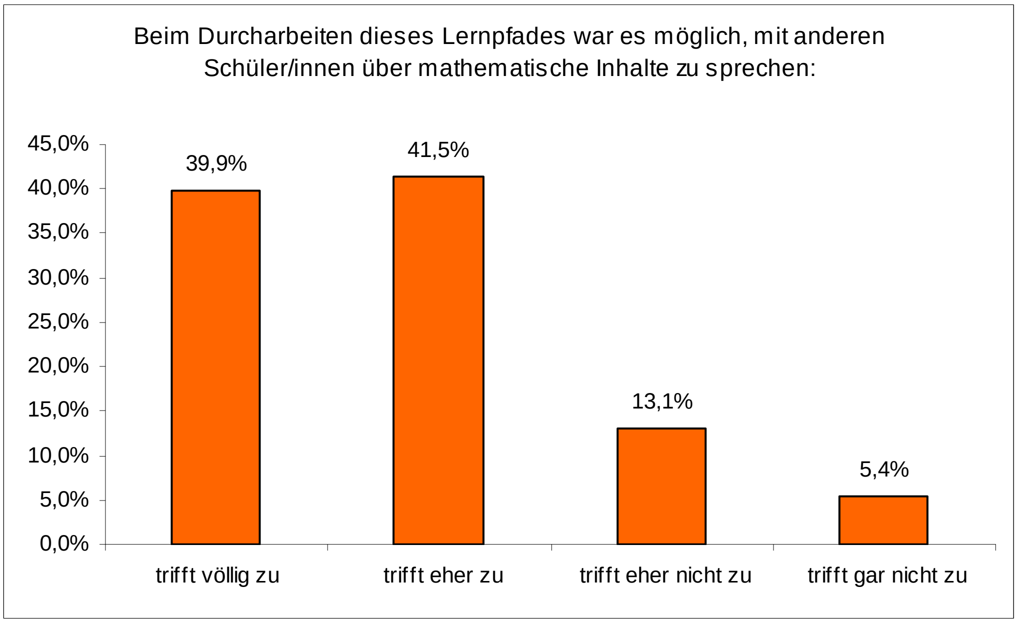
(1) Beim Durcharbeiten dieses Lernpfades war es möglich mit anderen Schüler/innen über die mathematischen Inhalte zu sprechen:

trifft gar nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft völlig zu
☐	☐	☐	☐

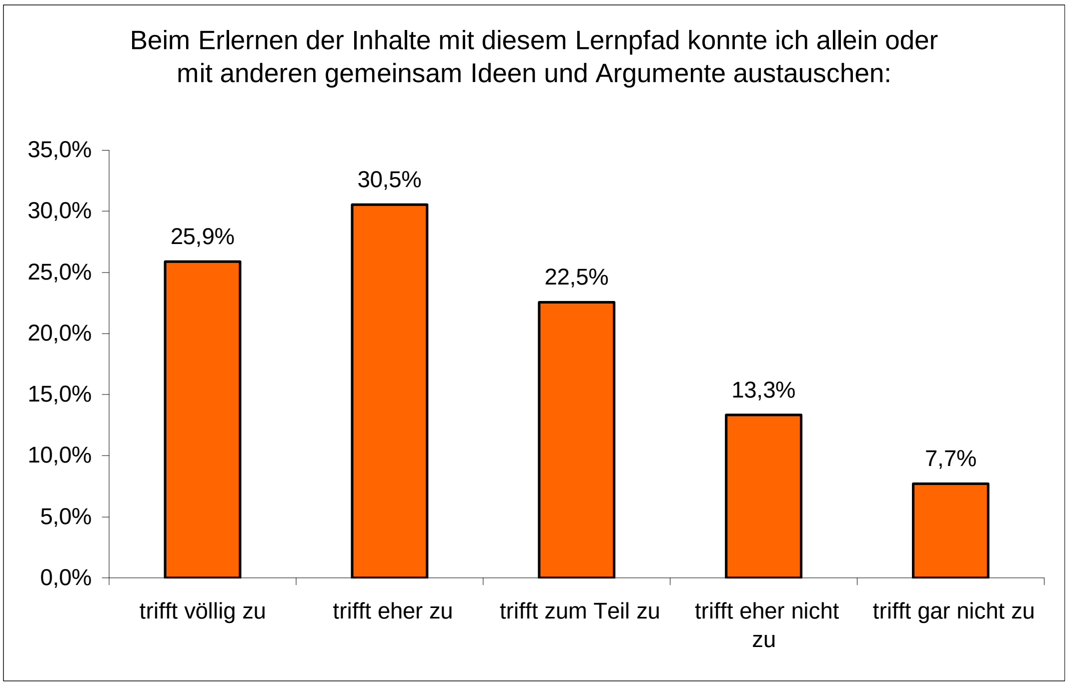
(2) Beim Erlernen der mathematischen Inhalte mit diesem Lernpfad konnte ich allein oder mit anderen gemeinsam Ideen und Argumente austauschen:

trifft gar nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft zum Teil zu	trifft eher zu	trifft völlig zu
☐	☐	☐	☐	☐

Beide Items liefern erfreuliche Ergebnisse. 81,4% der Schüler/innen stimmen der Aussage: „Beim Durcharbeiten dieses Lernpfades war es möglich mit anderen Schüler/innen über die mathematischen Inhalte zu sprechen“ völlig bzw. eher zu und nur 18,5% können ihr eher nicht bzw. gar nicht zustimmen.



Der Aussage: „Beim Erlernen der mathematischen Inhalte mit diesem Lernpfad konnte ich allein oder mit anderen gemeinsam Ideen und Argumente austauschen“ stimmen 56,4% aller Schüler/innen völlig bzw. eher zu, 22,5% der Schüler/innen zum Teil und 21% der Schüler/innen können ihr eher nicht bzw. gar nicht zustimmen.



Auch hier belegen Zitate von Schüler/innen, das ihnen beim Arbeiten mit dem Lernpfad gefallen hat, allein oder mit anderen gemeinsam Ideen und Argumente auszutauschen.

- „gruppenarbeit/alleine ohne gestört zu werden selbst ausprobieren“
- „dass man Gelegenheit hatte sich mit anderen Schülern zum Thema Mathematik zu unterhalten und Problem zu disskutieren“
- „Man konnte selbständig arbeiten und sich mit anderen Schülern austauschen.“
- „Die Gruppenarbeit und die Kommunikation, es war eine gute Abwechslung zum »normalen« Unterricht!“
- „…dass man in gruppen arbeiten konnte,gedanken und ideen austauschen konnte.“

Dass der Aspekt der Kommunikation und Kooperation für unsere demokratische Gesellschaft bedeutend ist, habe ich eingangs bereits erwähnt. Dass Kommunikation und Kooperation immanenter Bestandteil eines allgemein bildenden Mathematikunterrichts sind, wurde in dieser Arbeit ebenfalls schon mehrmals aufgezeigt. Dass eine „*informatische Kommunikationskompetenz*“ einen bedeutenden Platz in einem Kompetenzmodell für den Informatikunterricht haben kann bzw. muss, zeigen Fuchs und Landerer in ihrem Beitrag „Das mühsame Ringen um ein Kompetenzmodell“ [Fu2, S. 8] auf. Mit „informatischer Kommunikationskompetenz“ sind „*Fähigkeiten im Bezug auf informati-*

sches Argumentieren“ bzw. auf die Artikulation informatischer Anliegen“ [Fu2, S. 8] sowie die Organisation, Dokumentation und Präsentation informatischer Tätigkeiten, Arbeitsfortschritte und Arbeitsergebnisse gemeint [Fu2, S. 8].

7.2.6.6 Stärkung des Schüler-Ichs

Dass die Stärkung des Schüler-Ichs eine ebenso wichtige und bedeutende Aufgabe eines allgemein bildenden Mathematikunterrichts ist wie die zuvor genannten, habe ich bereits im Kapitel 3 dargelegt. Heymann führt diesbezüglich als hemmenden Faktor den im Mathematikunterricht immer noch vorzufindenden (falschen) Umgang mit Fehlern an, der darin besteht, Fehler bloß als Indikatoren für Misserfolg zu interpretieren und nicht als notwendige Begleiterscheinung eines jeden Lernprozesses zu betrachten [Hey, S. 260]. Individualisierende Unterrichtsphasen ermöglichen Lernenden einen besseren Umgang mit den eigenen Schwächen und können dazu führen, Mut zum eigenen Denken zu entwickeln. Damit kann schließlich zur Stärkung des Schüler-Ichs beigetragen werden [Hey, S. 261]. Auch die von Schulmeister [Schu2, S. 10] erwähnte Anonymität und Sanktionsfreiheit bei der Interaktion mit Computerprogrammen scheint einen Beitrag zu Stärkung des Schüler-Ichs leisten zu können.

Fünf der bisher angeführten Merkmale einer allgemein bildenden Unterrichtskultur haben auch hohe Relevanz für die Stärkung des Schüler-Ichs und werden daher hier von mir noch einmal samt ihren Ergebnissen kurz dargestellt. Weitere diesbezügliche Merkmale wurden von mir nicht im Fragebogen als Item realisiert.

(1) „Das Verstehen mathematischer Sachverhalte wird ihrer technischen Beherrschung übergeordnet; es zeigt sich für den Lehrer nicht zuletzt daran, wieweit Schüler über das reflektieren können, was sie mathematisch tun“
(2) „Es gibt Raum für Umwege, ungewöhnliche Ideen, Offenheit für unterschiedliche Verläufe des Unterrichts“

Diese beiden Merkmale wurden im Zusammenhang mit der Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch erörtert. Es zeigte sich, dass das erste – abgedeckt durch die zwei Items „Das Verstehen der Inhalte war bei diesem Lernpfad sehr wichtig“ und „Beim Bearbeiten dieses Lernpfades gab es Gelegenheit, über das mathematische Tun nachzudenken“ – auf hohe Zustimmung (89,5% und 70,8%, S. 207) stieß. Beim zweiten Merkmal konnten eklatante Unterschiede zwischen Unter- und Oberstufenschüler/innen sowie Schüler/innen, für die Mathematik ein Fach ist, das sie mögen bzw. nicht mögen, festgestellt werden (S. 208 f.). Heymann plädiert hinsichtlich der Stärkung des Schüler-Ichs für „offenere“ Aufgaben, die individuell unterschiedliche Lösungswege zulassen, Gelegenheit zum spielerischen Umgang mit Mathematik geben und das Aufgreifen ungewöhnlicher Ideen ermöglichen [Hey, S. 261]. Genau dies scheint bei den Lernpfaden der Unterstufe, deren Aufgaben und interaktive Multimedia-Komponenten einen größeren Freiheitsgrad aufweisen, besser gelungen zu sein als bei jenen der Oberstufe. Denn genau dieser Freiheitsgrad ermöglicht den Schüler/innen eigene Gedanken einzubringen, wenn nötig Umwege zu gehen und ungewöhnlichen Ideen nachzuforschen. Damit kann wohl zweifelsohne Mut zum eigenen Denken entwickelt werden. Folgende Zitate, die abermals der Rubrik „Gut gefallen hat mir“ entnommen sind, belegen deutlich den Beitrag zur Stärkung des Schüler-Ichs:

- „die Selbstständigkeit mit der wir an das Thema herangehen mussten“
- „Das wirklich individuelle Lerntempo“
- „aleine arbeiten, über die geschwindigkeit beim lernen selbst bestimmen“
- „Die individuelle Einteilung und Lernvorgänge bei diesem Lernpfad.“
- „dass man räzeln musste und sich richtig anstrengen konnte“
- „Das heranarbeiten an das thema und das selbstständige überlegen der arbteit“
- „Das man nicht das lernt, was der Lehrer sagt, sondern durch eigens logisches Denken selber gelernt hatt.“

Das nächste Merkmal, das sowohl zur Stärkung des Schüler-Ichs als auch zur Einübung in die Verständigung und Kooperation beiträgt, wurde auch positiv evaluiert.

(3) „Mathematiklernen wird häufig als ein Erkundungsprozeß erfahren, der allein oder gemeinsam mit anderen in intensivem Austausch von Ideen und Argumenten vollzogen werden kann“

56,4% aller Schüler/innen stimmen der Aussage: „Beim Erlernen der Inhalte mit diesem Lernpfad konnte ich allein oder mit anderen gemeinsam Ideen und Argumente austauschen“ völlig bzw. eher zu (S. 224) und einige führen bei der Möglichkeit positives Feedback zu geben genau dieses Merkmal an.

(4) „Im Unterricht sind Neugier, Spannung, Engagement, Überraschung, Lust am Denken und mathematischen Tun nichts Ungewöhnliches“

Bei diesem Merkmal hat sich gezeigt, dass nicht nur die Kluft zwischen den Unter- und Oberstufenschüler/innen groß ist, sondern auch die zwischen Schüler/innen mit bzw. ohne Affinität zur Mathematik (S. 216 ff.):

(5) „Die Schüler übernehmen Verantwortung für ihren eigenen Lernprozeß“

Beim fünften und letzten Merkmal, das zur Stärkung des Schüler-Ichs beiträgt, sind die Evaluationsergebnisse wieder sehr zufrieden stellend. 86,1% aller Schüler/innen stimmen der Aussage: „Beim Erlernen der Inhalte mit diesem Lernpfad war ich selbst für meinen Lernfortschritt und Lernprozess verantwortlich“ völlig bzw. eher zu (S. 195 ff.) und viele bisher wiedergegebene Schüler/innenstatements manifestieren dieses Bild. Dass dazu auch interaktive Multimedia-Komponenten beitragen können, die den Schüler/innen das selbstständiges Entdecken und Erforschen der Mathematik ermöglichen, wurde schon mehrfach angeführt und anhand einzelner Beispiele illustriert.

7.2.7 Zusammenfassung: Lernpfade und ihr Beitrag zu einer allgemein bildenden Unterrichtskultur – Schüler/inneneinschätzung

Mit den obigen Ausführungen konnte eindeutig die Schüler/innenmeinung nachgewiesen werden, dass alle Lernpfade einen Beitrag zu einer allgemein bildenden Unterrichtskultur und zu allen sieben Allgemeinbildungsaufgaben leisten können. Dass es innerhalb dieser Unterschiede gibt, wurde auch anhand einiger Beispiele deutlich belegt.

Der Freiheitsgrad der interaktiven Multimedia-Komponenten und offene Aufgabenstellungen scheinen große Bedeutung für den individuellen und selbstgesteuerten Lernprozess (Lebensvorbereitung) sowie für das Einbringen eigener Gedanken (Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch) und die Stärkung des Schüler-Ichs zu haben.

Für die Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft und die Einübung in Verständigung und Kooperation braucht es nicht unbedingt multimediale Komponenten, aber die Lernpfade und die damit intendierte und auch erreichte Unterrichtskultur fördert beides.

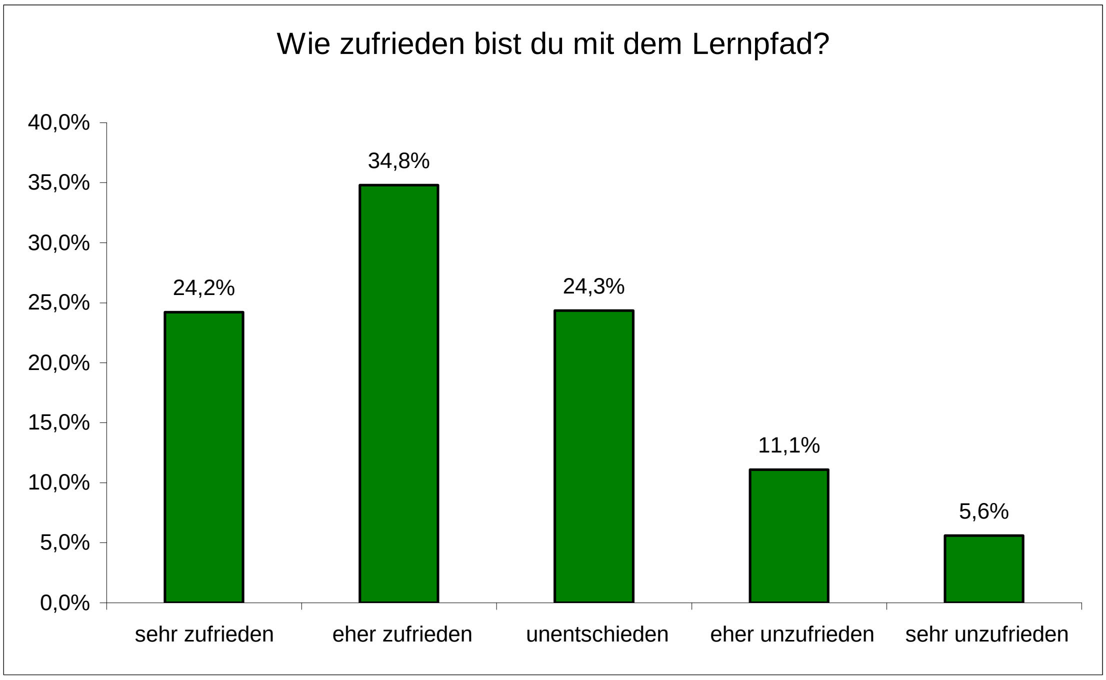
Einige der sieben Allgemeinbildungsaufgaben konnten mit einzelnen Lernpfaden der Oberstufe weniger gut, mit anderen jedoch sehr gut realisiert werden. Möglicherweise könnten hier schon geringfügige Änderungen in den Lernpfaden bessere Ergebnisse nach sich ziehen.

Ferner hat sich gezeigt, dass Schüler/innen, für die Mathematik ein Fach ist, das sie nicht mögen, deutlich geringer die Merkmale einer allgemein bildenden Unterrichtskultur erleben, ihre eigenen Gedanken weniger einbringen können und auch die Lernpfade mit eher wenig Neugier, Engagement sowie Lust am mathematischen Denken und Tun absolvieren.

7.2.8 Zufriedenheit der Schüler/innen mit den Lernpfaden, positives und negatives Feedback

Zum Abschluss des Fragebogens konnten die Schüler/innen ihrer Zufriedenheit mit den Lernpfaden Ausdruck verleihen und in offenen Antwortfeldern angeben, was ihnen gut gefallen hat bzw. was sie gestört hat.

Etwas mehr als die Hälfte der Schüler/innen ist mit dem Lernpfad sehr bzw. eher zufrieden und 16,7% sind mit dem Lernpfad eher bzw. sehr unzufrieden.



Gefallen hat den Schülern und Schülerinnen:

- das selbstständige Arbeiten,
- das Arbeiten im Team oder in der Gruppe,
- das Arbeiten am Computer,
- das selbstständige Arbeiten mit dem Computer,
- die Möglichkeit im Internet nach Mathematik zu recherchieren,
- die interaktiven Übungen,
- die Animationen,
- die Möglichkeit vieles interaktiv zu erproben,
- die Möglichkeit das eigene Lerntempo zu wählen,
- die Gliederung und Strukturierung der Lernpfade,
- die Übungen mit verschiedenen mathematischen Softwareprodukten und die entsprechenden Anleitungen dazu,
- die Grafiken, Skizzen, Bilder und Darstellungen,
- die Abwechslung zum herkömmlichen Unterricht,
- die Hilfe der Mitschüler/innen und
- die verständlichen Erklärungen in den Lernpfaden.

Gestört hat die Schüler und Schülerinnen:

- dass manchmal zu wenig Zeit war,
- dass die Sprache gelegentlich schwer verständlich war,
- dass technische Schwierigkeiten auftraten,
- dass von den Lehrenden nichts bzw. zu wenig erklärt wurde,
- dass es Schwierigkeiten mit Java gab,
- das Fehlen von Zusammenfassungen und Lösungsvorschlägen,
- das selbstständige Arbeiten und
- das viele Lesen.

Alles in allem kann die Zufriedenheit der Schülerinnen und Schüler mit den Lernpfaden als recht hoch eingestuft werden. Vieles, was die Schülerinnen und Schüler als störend empfunden haben, beruht nicht auf den Lernpfaden selbst. Es hat mich überrascht, dass doch technische Schwierigkeiten, Schwierigkeiten mit Java und lange Ladezeiten aufgetreten sind und die Schüler/innen darüber geklagt haben. Dass manche Lehrende den Schülerinnen und Schülern zu wenig Zeit zum selbstständigen Erarbeiten der Inhalte ließen, ist zu bedauern. Auch dass von manchen Lehrenden anscheinend nichts bzw. zu wenig erklärt wurde, ist bedauerlich, lag aber definitiv nicht im Interesse der Lernpfadersteller/innen. Vielmehr haben wir uns gedacht, dass das Material den Lehrenden Freiraum für die individuelle Betreuung einzelner Schüler/innen gibt. Das Monieren des Fehlens von Zusammenfassungen und Lösungsvorschlägen erachte ich als einen sehr hilfreichen Hinweis für die Gestaltung weiterer Lernpfade. Es scheint den Schülerinnen und Schülern Sicherheit zu geben, wenn Lösungsvorschläge vorhanden sind und sie diese mit ihren eigenen vergleichen können. Zusammenfassungen können eventuell dafür sorgen, dass das Wichtigste für Schülerinnen und Schüler in kompakter Form dargestellt wird und sie auch da wieder die Möglichkeit haben ihren Wissensstand abzugleichen.

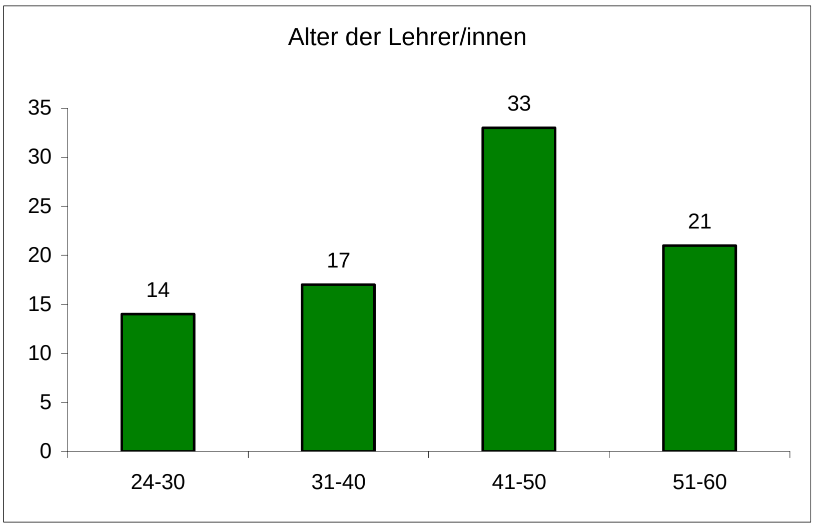
7.3 Fragebogen für Lehrer/innen

Der Fragebogen für die Lehrerinnen und Lehrer (siehe Anhang), der sich in drei Abschnitte gliedert, umfasst 22 Items und ein abschließendes offenes Kommentarfeld. Beim ersten Abschnitt werden allgemeine Informationen erhoben, beim zweiten wird evaluiert, ob die didaktischen Kommentare für die Lehrenden hilfreich und ausreichend waren. Im dritten Abschnitt des Fragebogens haben die Lehrerinnen und Lehrer zum einen Gelegenheit Feedback zur Gestaltung der Lernpfade zu geben, zum anderen wird evaluiert, ob die Lernpfade aus Sicht der Lehrenden einen Beitrag zu einem allgemein bildenden Mathematikunterricht leisten können. Diese Fragen orientieren sich wiederum an den von Heymann definierten Merkmalen einer allgemein bildenden Unterrichtskultur. Zudem wurden einige dieser Fragen so gestellt, dass die Ergebnisse mit denen der Schüler/innen verglichen werden können.

Bei der Darstellung der Ergebnisse des Lehrer/innenfragebogens werde ich jeweils die absoluten Werte anführen und erst beim Vergleich der Schüler/innen- und Lehrer/innenergebnisse die entsprechenden Prozentsätze verwenden.

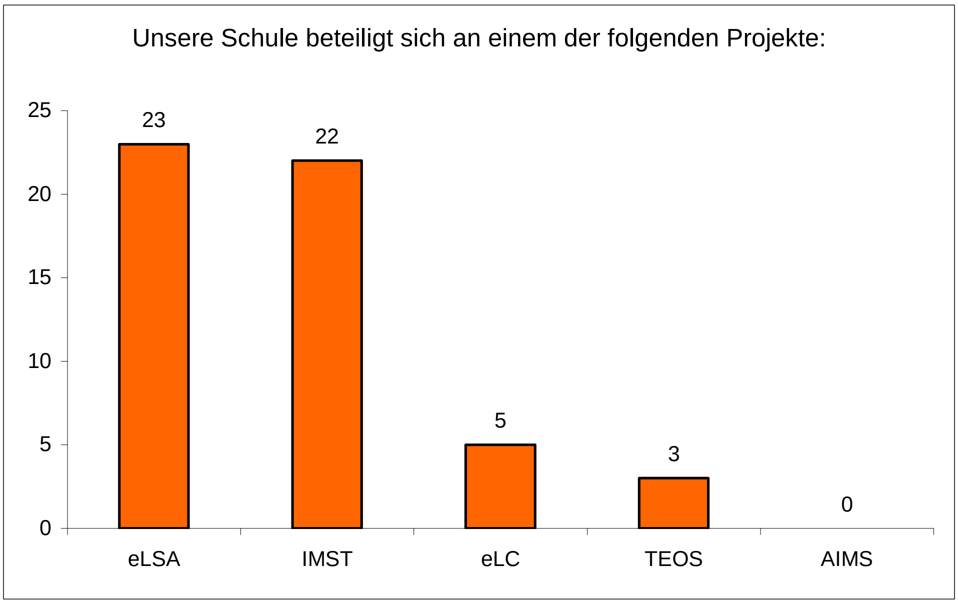
7.4 Ergebnisse des Fragebogens für Lehrer/innen

An der Evaluation nahmen 89 Lehrende aus ganz Österreich teil, davon waren 48 weiblich und 41 männlich. 85 von 89 Lehrer/innen waren bereit uns Auskunft über ihr Alter zu geben. Am geringsten war die Gruppe der 24- bis 30-Jährigen vertreten, am häufigsten die der 41- bis 50-Jährigen.



7.4.1 Allgemeines

Zu Beginn wollten wir von den Lehrer/innen wissen, ob sich ihre Schule bereits an einem österreichweiten E-Learningprojekt (eLSA = eLearning im Schulalltag der Unterstufe; eLC = eLearning Schulcluster Oberstufe; AIMS = Aufbau von Informationsmanagement an Schulen mit Hilfe der multimedialen Schulbibliothek), an einem Schulentwicklungsprojekt (TEOS = Entwicklung von Team- und Organisationsstrukturen an Schulen) oder an der Initiative des BMUKK zur Weiterentwicklung des Mathematik-, Naturwissenschafts- und Informatikunterrichts in Österreich (IMST) beteiligt.



23 Lehrende gaben an, dass sich ihre Schule an eLSA beteiligt und weitere 5 Lehrende gaben an, dass sich ihre Schule an eLC beteiligt. 22 Lehrende haben an ihrer Schule IMST-Projekte und 3 Lehrer/innen haben Erfahrung mit TEOS. Insgesamt erweckt dies den Eindruck, dass die Schulen, an denen die Lehrer/innen unterrichten, experimentierfreudig sind und damit die Lehrenden und Lernenden innovativen Unterrichtsprojekten offen gegenüberstehen.

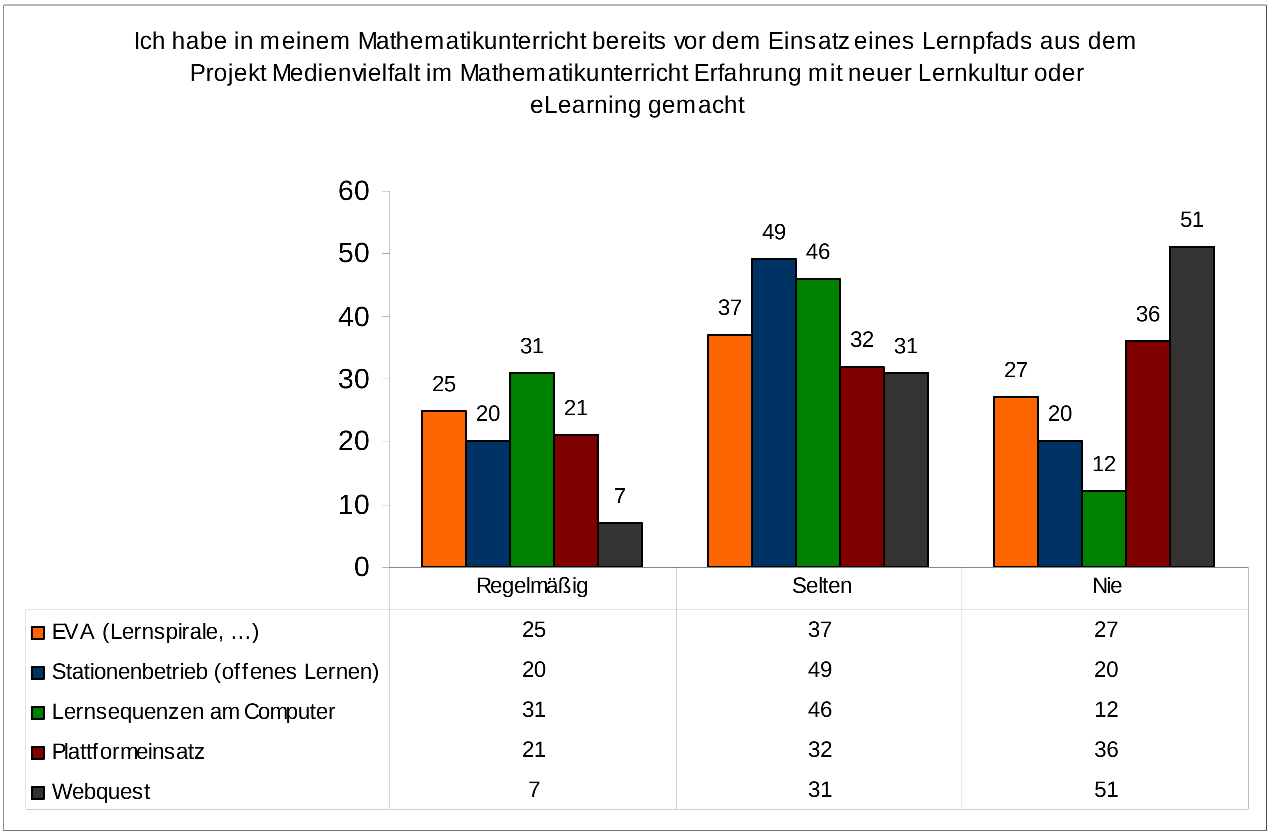
Im allgemeinen Teil der Evaluation wurde weiters erhoben, ob die Lehrerinnen und Lehrer bereits vor dem Einsatz der Lernpfade in ihrem Mathematikunterricht Erfahrung mit neuer Lernkultur (z. B. EVA, Stationenbetrieb) oder E-Learning gemacht haben.

Von den 89 Lehrenden arbeiteten bereits 31 Lehrer/innen im Mathematikunterricht regelmäßig mit dem Computer, weitere 46 nur selten und 12 Lehrer/innen haben noch nie Lernsequenzen am Computer in ihrem Mathematikunterricht eingesetzt.

Lernplattformen werden von 21 Lehrer/innen regelmäßig, von 32 selten und von 36 nie im Unterricht verwendet. Webquest ist noch seltener vertreten.

Mit der neuen Lernkultur haben einige Lehrer/innen bereits regelmäßig oder selten Erfahrung, es gibt jedoch 27 Lehrende, die noch nie Lernspiralen oder Ähnliches in ihrem Unterricht eingesetzt haben und 20, die bisher noch nicht mit einem Stationenbetrieb oder anderen Formen des offenen Lernens gearbeitet haben.

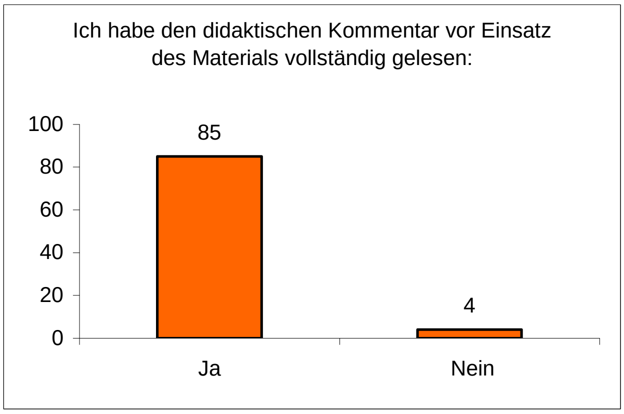
Dieser Befund entspricht nicht der obigen Einschätzung der Innovationsfreude der Lehrenden aufgrund ihrer Beteilung an österreichischen Projekten. Offenbar ist die Teilnahme der Schule an einschlägigen Initiativen kein Garant für eine Disposition einzelner Lehrenden.

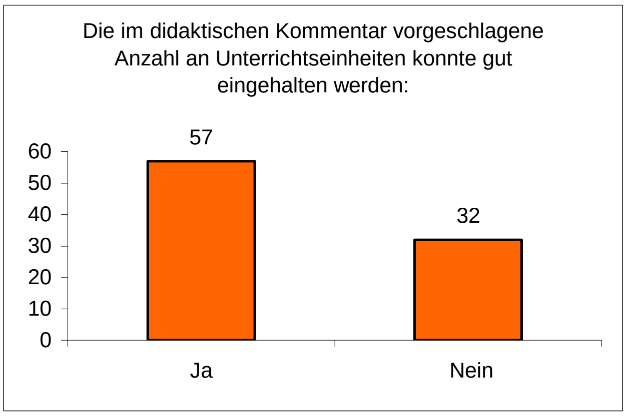


	Regelmäßig	Selten	Nie
EVA (Lernspirale, ...)	25	37	27
Stationenbetrieb (offenes Lernen)	20	49	20
Lernsequenzen am Computer	31	46	12
Plattformeinsatz	21	32	36
Webquest	7	31	51

7.4.2 Bewertung der didaktischen Kommentare

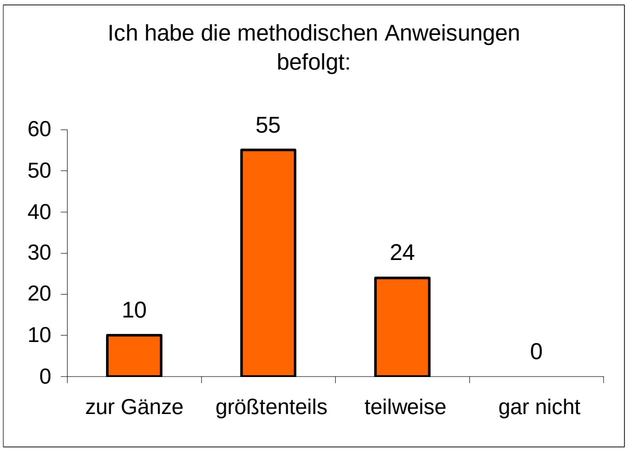
Zu jedem Lernpfad gibt es einen speziellen didaktischen Kommentar, der vom Team der Ersteller/innen verfasst wurde. Jeder dieser didaktischen Kommentare beginnt mit einer kurzen Beschreibung der Lernpfadinhalte und listet danach tabellarisch auf, für welche Schulstufe der Lernpfad konzipiert wurde, wie viele Unterrichtsstunden einzuplanen sind, ob es fächerübergreifende Aspekte gibt, welche Medien verwendet werden und welche technischen Voraussetzungen wichtig sind. Danach werden die technischen, fachlichen und methodischen Voraussetzungen, die einen erfolgreichen Einsatz des Lernpfads gewährleisten sollen, recht detailliert erörtert. Einige didaktische Kommentare beinhalten ausführliche Beschreibungen des intendierten Unterrichtsverlaufs, fast alle beschreiben auch die Art und Weise der Medienkombination und zeigen Möglichkeiten zur Leistungsbeurteilung auf. Zu manchen Lernpfaden wurden unterschiedliche Umsetzungsvorschläge (als Lernspirale, integriert in eine Lernplattform, …) ausgearbeitet und den Lehrenden im Rahmen des didaktischen Kommentars vorgestellt. Den Abschluss eines jeden didaktischen Kommentars bildet eine Tabelle, in der die Lehrinhalte den Lernzielen des entsprechenden Lehrplans gegenübergestellt werden.



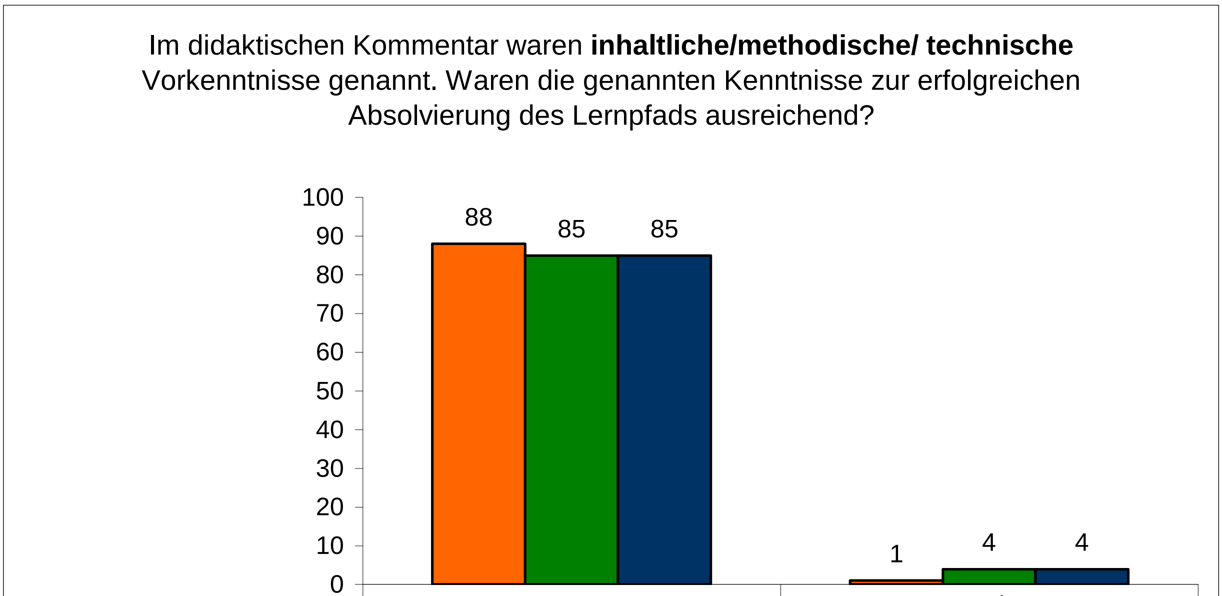


Fast alle Lehrerinnen und Lehrer haben den didaktischen Kommentar vor Einsatz des Materials vollständig gelesen. Die Anzahl der vorgeschlagenen Unterrichtseinheiten konnten jedoch nur von 57 Lehrer/innen gut eingehalten werden. Einige Lehrende würden um 2 bis 6 Stunden mehr veranschlagen. In diesem Zusammenhang sei nochmals erwähnt, dass auch manche Schüler/innen angemerkt haben, dass zu wenig Zeit war. Ich denke, der von den Teams angegebene Wert kann nur als ungefährer Richtwert betrachtet werden und alle Lehrer/innen, die die Lernpfade im Unterricht einsetzen, sollten den Schülerinnen und Schülern die Zeit geben, die sie zum sinnvollen Absolvieren der Lernpfade brauchen.

Die methodischen Anweisungen wurden von den meisten Lehrenden größtenteils befolgt, nur wenig haben sich zur Gänze an sie gehalten, keine/r Lehrer/in hat diese Anweisungen gar nicht befolgt.



Die im didaktischen Kommentar angeführten Vorkenntnisse, die die Schüler/innen zum Absolvieren des Lernpfads benötigen, waren für fast alle Lehrer/innen ausreichend. Allein bei den methodischen und technischen Vorkenntnissen sind 4 Lehrende anderer Meinung.



	Ja	Nein
inhaltliche Vorkenntnisse	88	1
methodische Vorkenntise	85	4
technische Vorkenntnisse	85	4

Nur vereinzelt haben Lehrer/innen bei den angeschlossenen offenen Antwortfeldern mitgeteilt, was in diesem Bereich verbessert werden könnte. Fünf von sechs Antworten betreffen die technischen Voraussetzungen und seien hier angeführt:

- „*Hinweis auf Start mit „Index htm“ sollte größer und auffallender sein. Hinweis und Lösungsmöglichkeiten wenn Applets von den Sicherheits-einstellungen gesperrt werden.*“
- „*Im Umgang mit einer Tabellenkalkulation waren viele Schüler ungeübt.*“
- „*Mir hat nichts gefehlt; aber wenn jemand keine Kenntnisse im Umgang mit dynamischen Geometrieprogrammen hat, kann er auftretende Probleme nicht beheben*“
- „*nur CAS-Rechner hat nicht gereicht*“
- „*Umgang mit dem PC*“

Die letzte Antwort war: „*selbständiges Führen einer Protokollmappe war unzureichend möglich*“. Leider wird daraus nicht ersichtlich, ob es den Schülern und Schülerinnen aufgrund von Unkenntnis oder mangelnder Übung unzureichend möglich war, eine Protokollmappe zu führen. Die Antwort lässt auch offen, ob diese Art des Unterrichts das selbstständigen Führen von Protokollmappen (an sich) zulässt oder nicht.

Die Vorschläge zur Unterrichtsgestaltung mit den Lernpfaden sind sehr vielfältig. Beim Lernpfad „Koordinatensystem und geometrische Grundbegriffe“ steht den Lehrenden beispielsweise eine Zusammenstellung in Form eines Lernparcours[72] zur Verfügung, die sie direkt an ihre Schüler/innen weitergeben und zur Gestaltung ihres Unterrichts verwenden können. Mit diesem Lernparcours kann der Unterricht abwechslungsreich gestaltet werden, die Schüler/innen erleben dabei Lehrer/innen-Inputs, Einzel-, Partner- und Gruppenarbeit mit oder ohne Computer.

[72] http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/geo_grundbegriffe/download/lernparcours.pdf (gültig am 04.08.2007)

Lernparcours

Einführung – Koordinatensystem und Geometrische Grundbegriffe

Kursive Anleitungen *Dein Lehrer / deine Lehrerin sagt dir, wie's geht ...*

Nr.	Titel	Aktivität	Schülerzahl	Arbeitsauftrag / *Lerninhalte*	P/N/W	Kontrolle
LA	*Kennenlernen von GeoGebra*			*Bedienung von GeoGebra: Fenster, Icons* *Werkzeuge kennen lernen: Punkt, Strecke, Vieleck*	*Input*	-
1	Reihenhaus		oder	Arbeitsblatt: Führe die Anleitung durch und verwende das Eigenschafts-Fenster (rechter Mausclick).	P	Selbst-kontrolle
LB	*Koordinatensystem*			*Besprechung: Ursprung, Koordinatenachsen, Quadranten*	*Input*	-
LC	*Direkte Eingabe und Bewegen von Objekten*			*Arbeiten mit der Eingabezeile: Punkt A=(x,y) und Strecke[A,B]* *3 Möglichkeiten des Bewegens von Objekten: Bewegen-Modus, Algebra-Fenster, direkte Eingabe*	*Input*	-
2	Roboter		oder	Arbeitsblatt: Führe die Anleitung durch und vervollständige auf dem Arbeitsblatt die fehlenden Koordinaten der Punkte.	P	Selbst-kontrolle
3	Sahara		und	Arbeitsblatt: Führe die Anleitung durch. Welches Forscherteam ist den kürzesten Weg gegangen? Vergleiche mit einem Partner / einer Partnerin.	P	Partner-kontrolle
4	Winkel am Ziffernblatt		oder	Lade das dynamische Arbeitsblatt und bearbeite die Aufgabenstellung.	W	Selbst-kontrolle

Erklärung der Abkürzungen und Symbole

N ... *für Profis: Hebe dein* ***N****iveau!*
P ... ***P****flicht*
W ... ***W****iederholung*

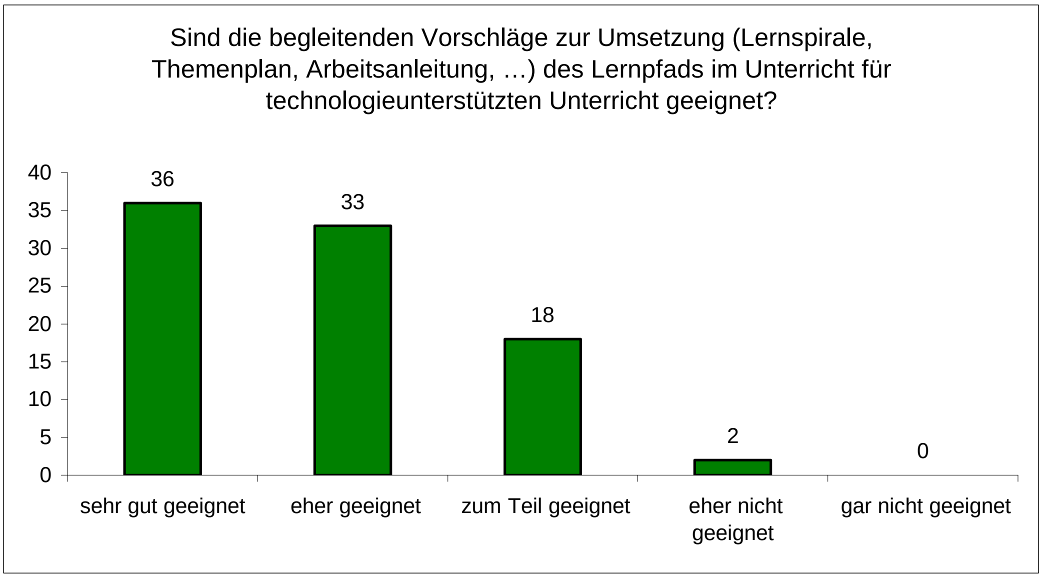
Schreiben — *Lehrer-Input*
GeoGebra — *gesamte Klasse*
Dynamisches Arbeitsblatt aufrufen — *Einzelarbeit*
Internet-Recherche — *Partnerarbeit*
schwierig

Für den Lernpfad „Beschreibende Statistik" wurde unter anderem eine Lernspirale[73] mit Makro- und Mikrospiralen sowie einige Arbeitsinseln detailliert erarbeitet. Auch hier können die Lehrenden die Vorschläge direkt für ihre Unterrichtsgestaltung verwenden.

[73] http://www.austromath.at/medienvielfalt/materialien/beschreibendeStatistik/content/Lernspirale_Statistik.htm (gültig am 04.08.2007)

Vorwissen /Voreinstellungen aktivieren	
A 00	Einführung: Was ist beschreibende Statistik? Was sind Daten? Wiederholung: einfache Säulendiagramme lesen
Neue Kenntnisse/ Verfahrensweisen erarbeiten	
A 01	Mittelwert ermitteln, darstellen, Eigenschaften erarbeiten und anwenden (2 Unterrichtseinheiten)
A 02	Median ermitteln, darstellen, Eigenschaften erarbeiten und anwenden, mit dem Mittelwert vergleichen – Kugellager (1 Unterrichtseinheit)
A 03	Unteres und oberes Quartil ermitteln, darstellen, Eigenschaften erarbeiten und anwenden – Gruppenrallye (1 Unterrichtseinheit)
A 04	Boxplot zeichnen und deuten (1 Unterrichtseinheit)
A 05	Standardabweichung ermitteln, Eigenschaften erarbeiten und anwenden, mit dem Interquartilsabstand vergleichen (1 Unterrichtseinheit)

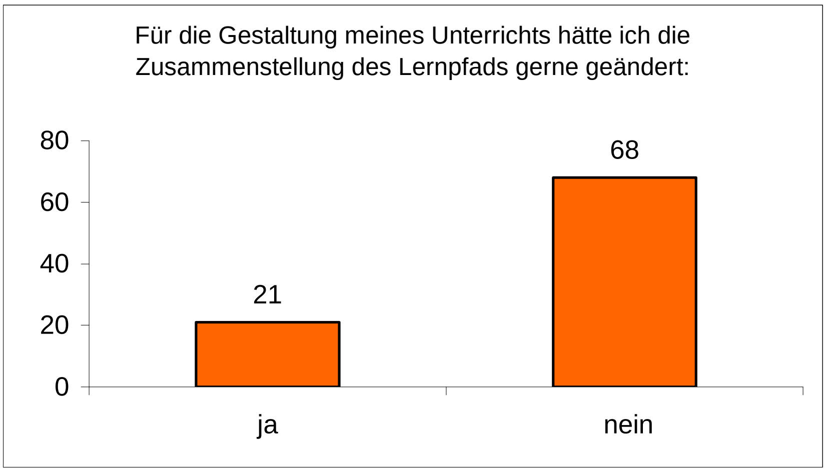
Die begleitenden Vorschläge zur Umsetzung des Lernpfads im Unterricht, mit denen wir erreichen wollten, dass nicht der Computer den Frontalunterricht übernimmt, wurden von einer überwiegenden Mehrheit der Lehrenden als sehr gut bzw. eher geeignet für einen technologieunterstützten Unterricht beurteilt.

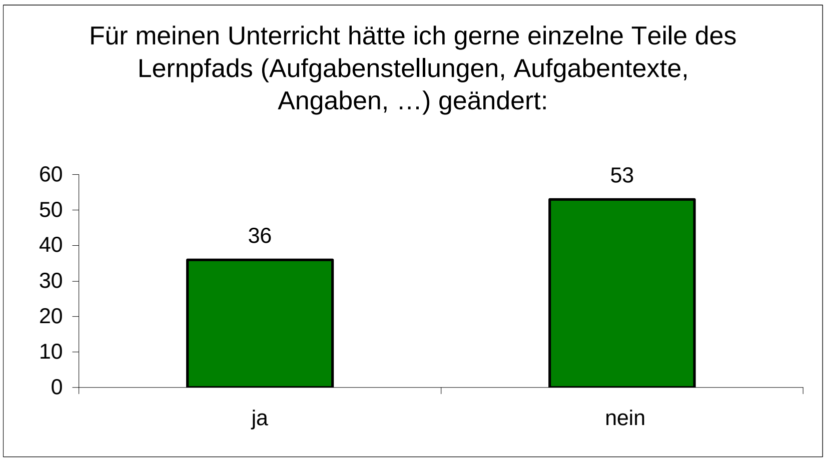


Die daran anschließende Aussage: „Die methodischen Anleitungen zum Lernpfad waren für mich sehr hilfreich“, wurde von 65 Lehrer/innen als völlig bzw. eher zutreffend beurteilt, 19 Lehrenden stimmen dieser Aussage nur zum Teil zu, 5 können ihr eher nicht zustimmen und keine/keiner meint, dass diese Aussage auf ihn/sie gar nicht zutrifft.

7.4.3 Ergebnisse zur Gestaltung der Lernpfade

Anders als bei den Schülerinnen und Schülern wollten wir bei den Lehrenden keine Information über die Usability der Lernpfade erheben, sondern wissen, ob sie die Zusammenstellung oder einzelne Teile der Lernpfade gerne für ihren Unterricht geändert hätten.





Grundsätzlich ist die Zufriedenheit mit der Zusammenstellung der Lernpfade sehr hoch. Nur 21 Lehrer/innen hätten die Zusammenstellung des Lernpfades gerne für ihren Unterricht adaptiert und 36 hätten gerne einzelne Teile geändert.

Aus den angeschlossenen offenen Antwortfeldern, bei denen die Lehrenden ihre Vorschläge äußern konnten, haben sich drei Wünsche herauskristallisiert:

1. Weniger Vorgaben hinsichtlich Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit.
2. Mehr Anknüpfungspunkte zu Schulbüchern.
3. Mehr Übungsaufgaben.

Dass sich manche Lehrende weniger Vorgaben hinsichtlich Einzel-, Partner- und Gruppenarbeit wünschen, wurde vor allem damit begründet, dass es oft nicht möglich war, die Schüler/innen in Einzelarbeit am Computer arbeiten zu lassen, da die Anzahl der vorhandenen Geräte dafür zu gering war.

Der Wunsch nach Anknüpfungspunkten zu Schulbüchern ist ein legitimer, wird von einer Person aber auch gleichzeitig als schwierige Herausforderung betrachtet, da viele verschiedene Schulbücher am Markt und in Verwendung sind. Dass manche Lernpfade möglicherweise zu wenige Übungsaufgaben beinhalten, mag durchaus richtig sein. Ich denke bzw. hoffe, dass aufgrund der Weiterentwicklungen im Bereich der Hypermedien ein individuelles Anpassen der Lernpfade an den eigenen Unterricht bald auch auf einfache Art und Weise möglich sein wird.

7.4.4 Lernpfade und ihr Beitrag zu einer allgemein bildenden Unterrichtskultur

Der Lehrer/innenfragebogen enthält ebenso wie der Schüler/innenfragebogen Items die auf Heymanns Merkmalen einer allgemein bildenden Unterrichtskultur beruhen (vgl. S. 160 ff.). Auch hier werde ich die Ergebnisse der Evaluation geordnet nach den entsprechenden Allgemeinbildungsaufgaben erörtern. Eine Zusammenschau der Schüler/innen- und Lehrer/innenergebnisse folgt in Kapitel 7.5.

7.4.4.1 Lebensvorbereitung und Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft

Hohe Relevanz für die zwei Allgemeinbildungsaufgaben „*Lebensvorbereitung*“ und „*Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft*“ weist das folgende Merkmal auf:

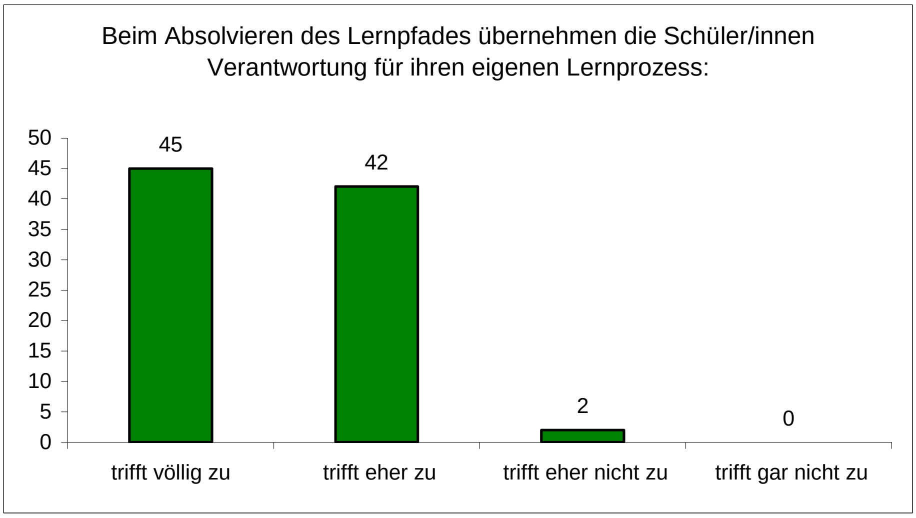
> „Die Schüler übernehmen Verantwortung für ihren eigenen Lernprozeß“

Beim Fragebogen der Lehrer/innen war dieses durch das nachstehende Item abgedeckt:

Beim Absolvieren des Lernpfades übernehmen die Schüler/innen Verantwortung für ihren eigenen Lernprozess:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐

Wie die Grafik zeigt, stimmen 87 Lehrende dieser Aussage völlig bzw. eher zu und nur zwei meinen, dass sie eher nicht zutreffend ist.



Nach Ansicht der Lehrenden können die Lernpfade also einen Beitrag zur Lebensvorbereitung und Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft leisten.

7.4.4.2 Stiftung kultureller Kohärenz und Weltorientierung

Zwei Items aus dem Fragebogen für Lehrer/innen zielen auf Unterrichtsmerkmale ab, die hohe Relevanz für die Aufgaben „*Stiftung kultureller Kohärenz*“ und „*Weltorientierung*“ haben.

Das Merkmal „*Sinn und Bedeutung der jeweils anstehenden Mathematik werden thematisiert*“ hat für beide soeben genannten Aufgaben hohe Relevanz, das Merkmal „*Vernetzungen zwischen mathematischen Teilgebieten werden herausgearbeitet, der Bezug zu zentralen Ideen wird verdeutlicht*“ weist hohe Relevanz für die Aufgabe der Weltorientierung auf.

Die Items lauteten:

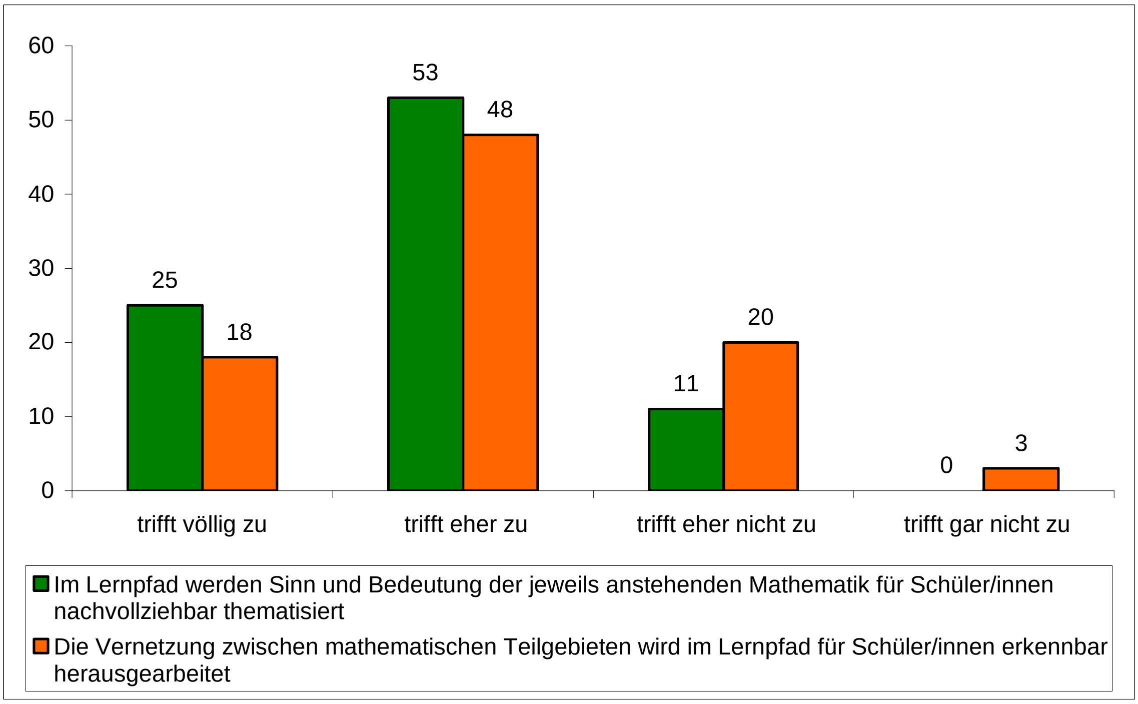
(1) Im Lernpfad werden Sinn und Bedeutung der jeweils anstehenden Mathematik für Schüler/innen nachvollziehbar thematisiert:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐

(2) Die Vernetzung zwischen mathematischen Teilgebieten wird im Lernpfad für Schüler/innen erkennbar herausgearbeitet:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐

Auch hier sind die Ergebnisse insgesamt sehr zufrieden stellend. Ein Großteil der Lehrer/innen stimmt den beiden Aussagen völlig bzw. eher zu. Etwas mehr Ablehnung erfährt die Aussage: „Die Vernetzung zwischen mathematischen Teilgebieten wird im Lernpfad für Schüler/innen erkennbar herausgearbeitet", die von drei Lehrenden überhaupt abgelehnt wird.



Da die Zustimmung deutlich die Ablehnung dieser beiden Aussagen überwiegt, lässt sich folgern, dass auch aus Sicht der Lehrenden die Lernpfade einen Beitrag zur Stiftung kultureller Kohärenz sowie zur Weltorientierung leisten können.

7.4.4.3 Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch

Ein Unterricht, der Schüler/innen zum Denken, Verstehen und kritischen Vernunftgebrauch anleiten kann, weist unter anderem folgende Merkmale auf:

> „*Das Verstehen mathematischer Sachverhalte wird ihrer technischen Beherrschung übergeordnet; es zeigt sich für den Lehrer nicht zuletzt daran, wieweit Schüler über das reflektieren können, was sie mathematisch tun*“

> „*Es gibt verschiedene Stufen der Annäherung an Erkenntnis, Hypothesen, Teillösungen usw.*“

Für den Fragebogen der Lehrer/innen habe ich dazu folgende zwei Items erstellt:

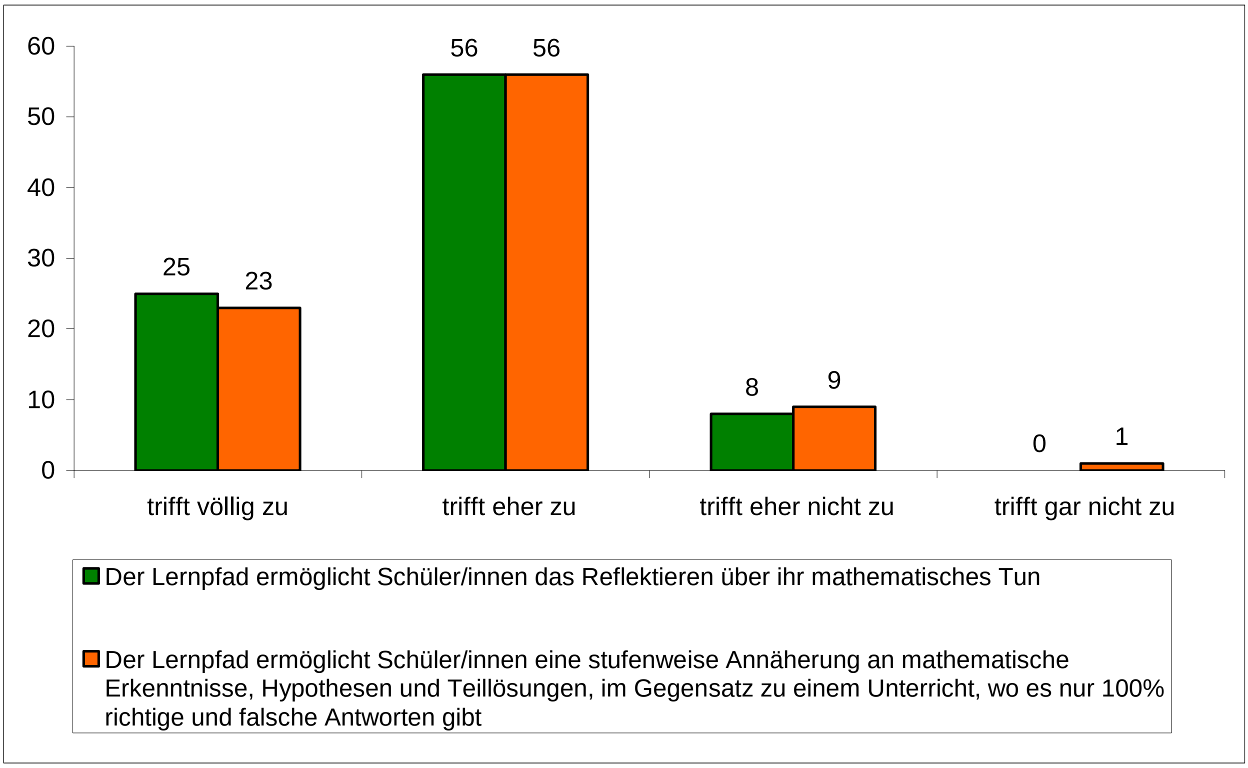
(1) Der Lernpfad ermöglicht Schüler/innen das Reflektieren über ihr mathematisches Tun:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐

(2) Der Lernpfad ermöglicht Schüler/innen eine **stufenweise** Annäherung an mathematische Erkenntnisse, Hypothesen und Teillösungen, im Gegensatz zu einem Unterricht, wo es nur 100% richtige und falsche Antworten gibt:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐

Auch hier sind die Evaluationsergebnisse positiv ausgefallen. Wiederum stimmt eine große Mehrheit der Lehrenden den beiden Aussagen völlig bzw. eher zu und bestätigt damit, dass es mit den Lernpfaden möglich ist, Schüler/innen zum kritischen Vernunftgebrauch anzuleiten.



7.4.4.4 Einübung in Verständigung und Kooperation

Die Einübung in Verständigung und Kooperation wird nach H. W. Heymann auch an den folgenden Unterrichtsmerkmalen deutlich [Hey, S. 262 ff.]:

> „*Schüler kommunizieren direkt miteinander*"

> „*Mathematiklernen wird häufig als ein Erkundungsprozeß erfahren, der allein oder gemeinsam mit anderen in intensivem Austausch von Ideen und Argumenten vollzogen werden kann*"

Entsprechende Items im Fragebogen der Lehrer/innen waren:

(1) Die vorgeschlagene Unterrichtsmethode fördert die Kommunikation der Schüler/innen untereinander über Mathematik:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐

(2) Mit diesem Lernpfad erleben Schüler/innen Mathematiklernen als Erkundungsprozess, der allein oder gemeinsam mit anderen in intensivem Austausch von Ideen und Argumenten vollzogen werden kann:

trifft gar nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft zum Teil zu	trifft eher zu	trifft völlig zu
☐	☐	☐	☐	☐

Ein weiteres Merkmal, das ebenfalls hohe Relevanz für das Einüben in Verständigung und Kooperation hat, und sein Pendant dazu lauten:

„*Es gibt immer wieder Gelegenheit, gemeinsam mit anderen an Probleme heranzugehen, sich über Ziele und Strategien zu verständigen, wechselseitig Schwächen auszugleichen und Stärken zu bündeln (Partner- und Gruppenarbeit)*“

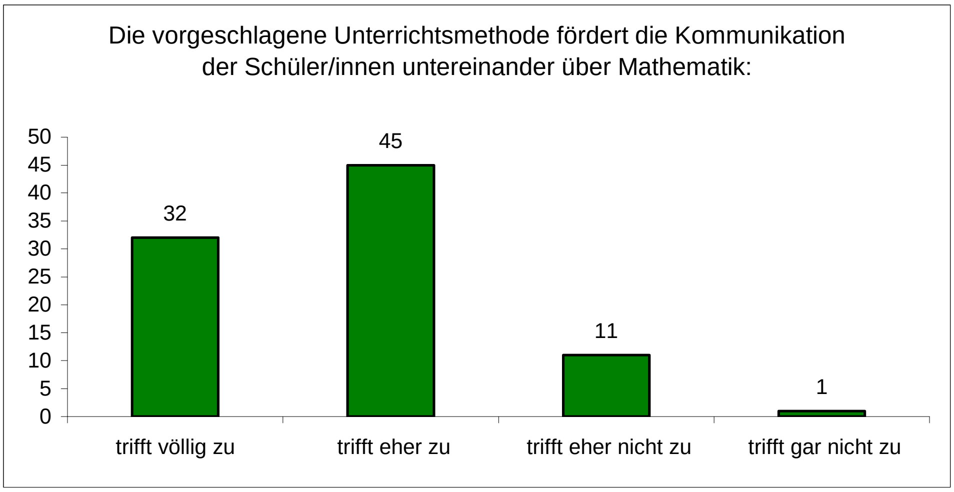
„*Jeder Schüler erlebt sich als Einzelkämpfer, „Kooperation“ findet lediglich auf der informellen Ebene des Unterrichts statt (Mogeln)*“

Gemäß diesem Merkmal hatten die Lehrenden folgende Aussage zu beurteilen:

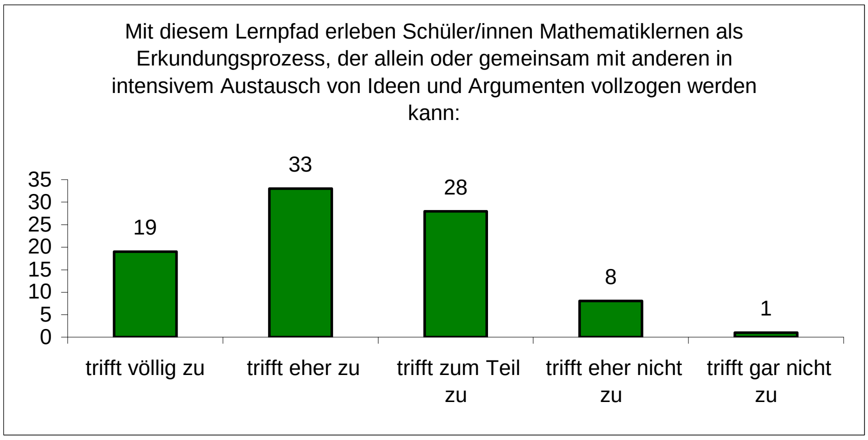
(3) Beim Absolvieren des Lernpfades erleben sich die Schüler/innen als Einzelkämpfer, „Kooperation“ findet lediglich auf der informellen Ebene des Unterricht (z.B.: Mogeln) statt:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft zum Teil zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐	☐

Ein Großteil der Lehrer/innen kann auch der Aussage: „Die vorgeschlagene Unterrichtsmethode fördert die Kommunikation der Schüler und Schülerinnen untereinander über Mathematik“, zustimmen.

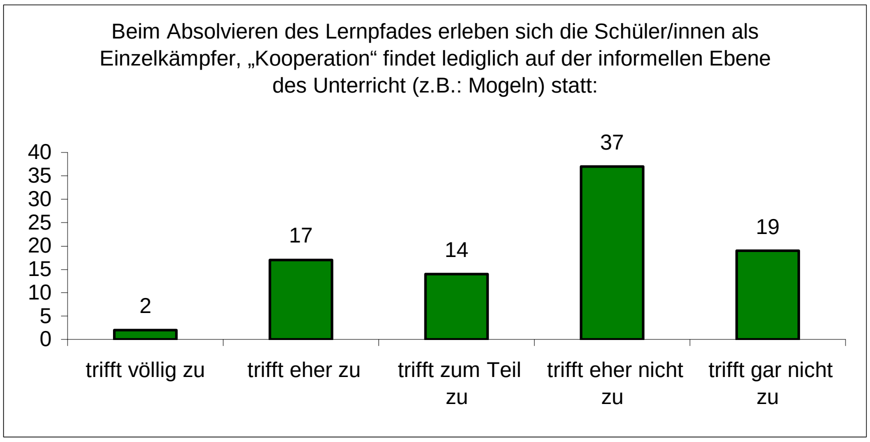


Dass mit den Lernpfaden Mathematiklernen als Erkundungsprozess, allein oder gemeinsam mit anderen, vollzogen werden kann, trifft für 52 Lehrer/innen völlig bzw. eher zu.



Für 28 Lehrpersonen trifft diese Aussage zum Teil zu, 8 lehnen sie eher und eine ganz ab.

56 Lehrer/innen stimmen der Aussage: „Beim Absolvieren des Lernpfades erleben sich die Schüler/innen als Einzelkämpfer, »Kooperation« findet lediglich auf der



informellen Ebene des Unterricht (z.B.: Mogeln) statt“ gar nicht bzw. eher nicht zu.

Erstaunlich ist aber, dass für immerhin 19 Lehrende diese Aussage eher oder völlig zutrifft. Möglicherweise haben diese Lehrpersonen weniger Vertrauen in ihre Schüler/innen, sobald diese mit dem Computer oder einem/einer Partner/in arbeiten.

7.4.4.5 Stärkung des Schüler-Ichs

Die Stärkung des Schüler-Ichs wird an vielen verschiedenen Merkmalen der Unterrichtskultur deutlich. Für den Fragebogen der Lehrer/innen habe ich zwei Items zu den korrespondieren Merkmalen formuliert.

> „*Individuell unterschiedliche Lösungswege werden nicht nur akzeptiert, sondern als besondere Zugangsweisen begrüßt*"

> „*Schüler erproben auf spielerische Weise in mathematikhaltigen Situationen ihre Phantasie und Kreativität*"

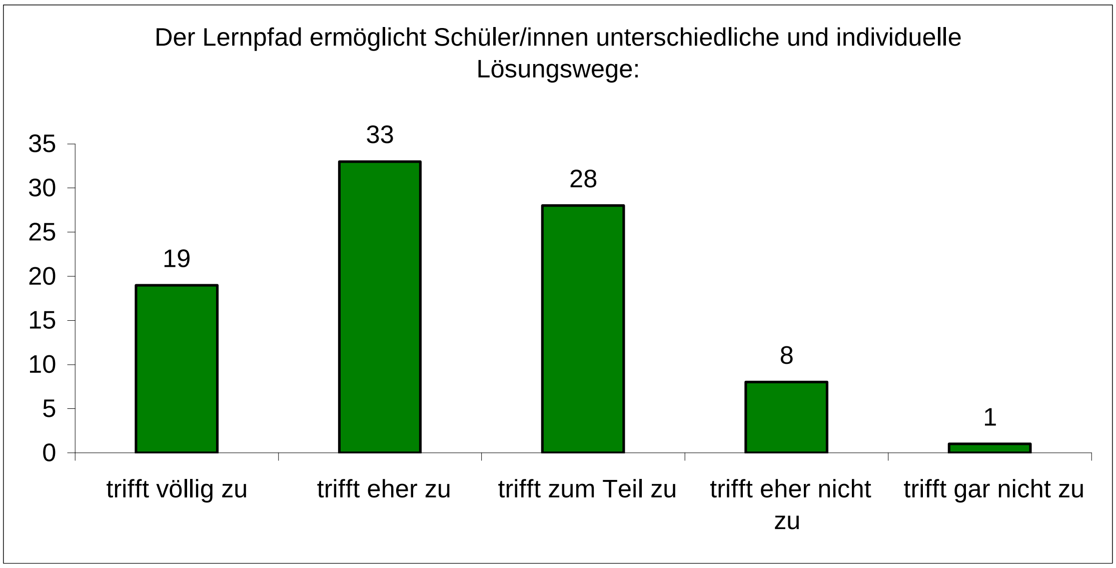
(1) Der Lernpfad ermöglicht Schüler/innen unterschiedliche und individuelle Lösungswege:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft zum Teil zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐	☐

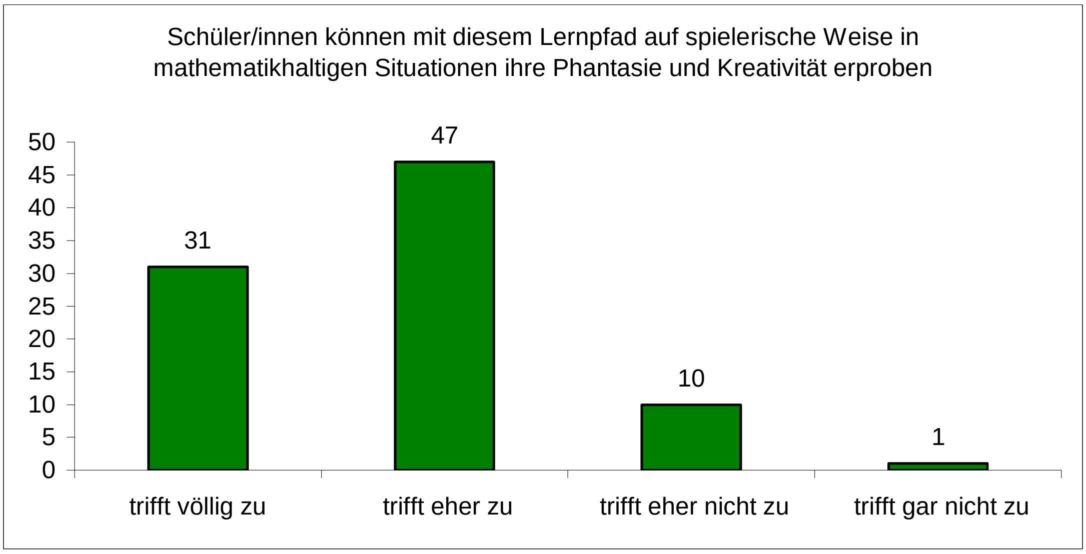
(2) Schüler/innen können mit diesem Lernpfad auf spielerische Weise in mathematikhaltigen Situationen ihre Phantasie und Kreativität erproben:

trifft gar nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft völlig zu
☐	☐	☐	☐

Auch hier zeigen die Ergebnisse deutlich, dass es mit den Lernpfaden gelingt einen Beitrag zur Stärkung des Schüler-Ichs zu leisten, denn 52 Lehrende stimmen der ersten Aussage völlig bzw. eher zu und nur 9 lehnen sie eher bzw. ganz ab.



Noch positiver bewerten die Lehrer/innen die Aussage: „Schüler/innen können mit diesem Lernpfad auf spielerische Weise in mathematikhaltigen Situationen ihre Phantasie und Kreativität erproben". Hier stimmen 78 Lehrende völlig bzw. eher zu, 10 stimmen eher nicht zu und nur eine Lehrperson lehnt diese Aussage völlig ab.



7.4.5 Zusammenfassung: Lernpfade und ihr Beitrag zu einer allgemein bildenden Unterrichtskultur aus Sicht der Lehrenden

Die Zustimmung der Lehrenden zu jenen Items, die den Beitrag der Lernpfade zu einem allgemein bildenden Unterricht im Fokus haben, ist sehr hoch. Dass mit dem Einsatz der Lernpfade auch aus Sicht der Lehrenden Merkmale einer allgemein bildenden Unterrichtskultur realisierbar sind, konnte anhand der Evaluationsergebnisse eindeutig nachgewiesen werden.

Einige abschließende Mitteilungen der Kolleginnen und Kollegen möchte ich hier zur Abrundung des Bildes noch anführen.

> „*Der Lernpfad ist ausgezeichnet strukturiert, die Grafiken sind sehr einprägsam und die Anwendungsbeispiele lebensnah. Tolle Leistung! Danke, dass ich diesen Lernpfad für meinen Unterricht verwenden durfte!*“

> „*Der Lernpfad ist eine ganz tolle Sache! Für die Lernenden eine willkommene Abwechslung. Ich finde ihn für die jungen Leute sehr attraktiv gestaltet mit Objekten aus deren Alltag.*“

Neben diesen äußerst positiven Rückmeldungen gibt es auch einige, die darauf verweisen, dass manche Schüler/innen Schwierigkeiten mit dieser eher ungewohnten Unterrichtsform hatten.

> „*Der Lernpfad ist für den Unterricht gut geeignet. Meine Schüler hatten zu wenig Erfahrung im selbstständigen Lernen – Es fehlte zum Teil auch die Bereitschaft, Verantwortung zu übernehmen. Viele Schüler trauten sich nicht, alleine zu arbeiten.*“

> „*Die SchülerInnen waren mit großem Eifer dabei. Vor allem schwächere SchülerInnen hatten Probleme bei der Erarbeitung. Gründe: mangelnde Organisationsfähigkeit, mangelnde Bereitschaft zum Herumprobieren.*“

> „*Ich glaube, meine Schüler hatten zum Teil Schwierigkeiten mit der Gestaltung des eigenen Hefteintrages, das sind sie nicht gewohnt. Insgesamt hatte ich beim Lernpfad den Eindruck, dass motiviert gearbeitet wurde!*“

Einige Male wurden von den Lehrenden auch wieder die technischen Schwierigkeiten als hinderlicher Faktor genannt. Es bleibt zu hoffen, dass diese in Zukunft vermeidbar sind und alle Aufmerksamkeit auf die Inhalte gerichtet werden kann.

> „*Die größten Probleme lagen für uns darin, dass wir erst mit der Arbeit am Notebook begonnen hatten, und noch viele technische Probleme aufgetreten sind, die die Arbeit immer wieder unterbrochen haben.*“

Zu guter Letzt sei noch ein Zitat angeführt, dass deutlich macht, welche Veränderungen der Einsatz von Lernpfaden hervorrufen kann:

> „*Das Unterrichten war manchmal anstrengender, weil völlig andere Fragen auftauchten als im Normalunterricht.*“

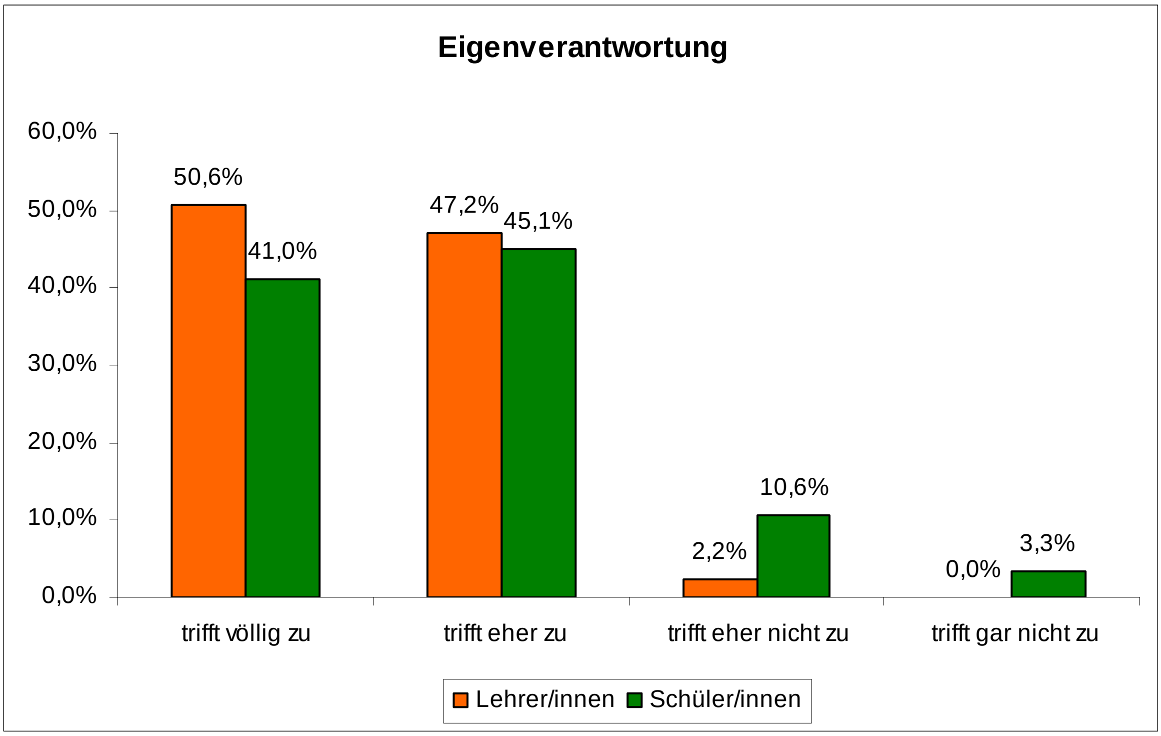
7.5 Vergleich der Lehrer/innen- und Schüler/innenergebnisse

In diesem Kapitel vergleiche ich einige Ergebnisse der Lehrer/innen- und Schüler/innenbefragung hinsichtlich des Beitrags der Lernpfade zur Allgemeinbildung. Dieser direkte Vergleich ist möglich, weil schon bei der Erstellung der Fragebögen darauf geachtet wurde und demnach einige Fragen des Schüler/innenfragebogens mit Fragen des Lehrer/innenfragebogens – bis auf leicht veränderte, schüler/innenadäquate Formulierungen – übereinstimmen.

7.5.1 Lebensvorbereitung und Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft

Beide Personengruppen hatten beim Fragenbogen Items, mit denen erhoben wurde, ob die Lernpfade einen Beitrag zur Lebensvorbereitung und zur Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft leisten können.

Für die *Lehrer/innen* lautete das Item: „Beim Absolvieren des Lernpfades übernehmen die Schüler/innen Verantwortung für ihren eigenen Lernprozess“.
Das entsprechende *Schüler/innenitem* war: „Beim Erlernen der Inhalte mit diesem Lernpfad war ich selbst für meinen Lernfortschritt und Lernprozess verantwortlich“.

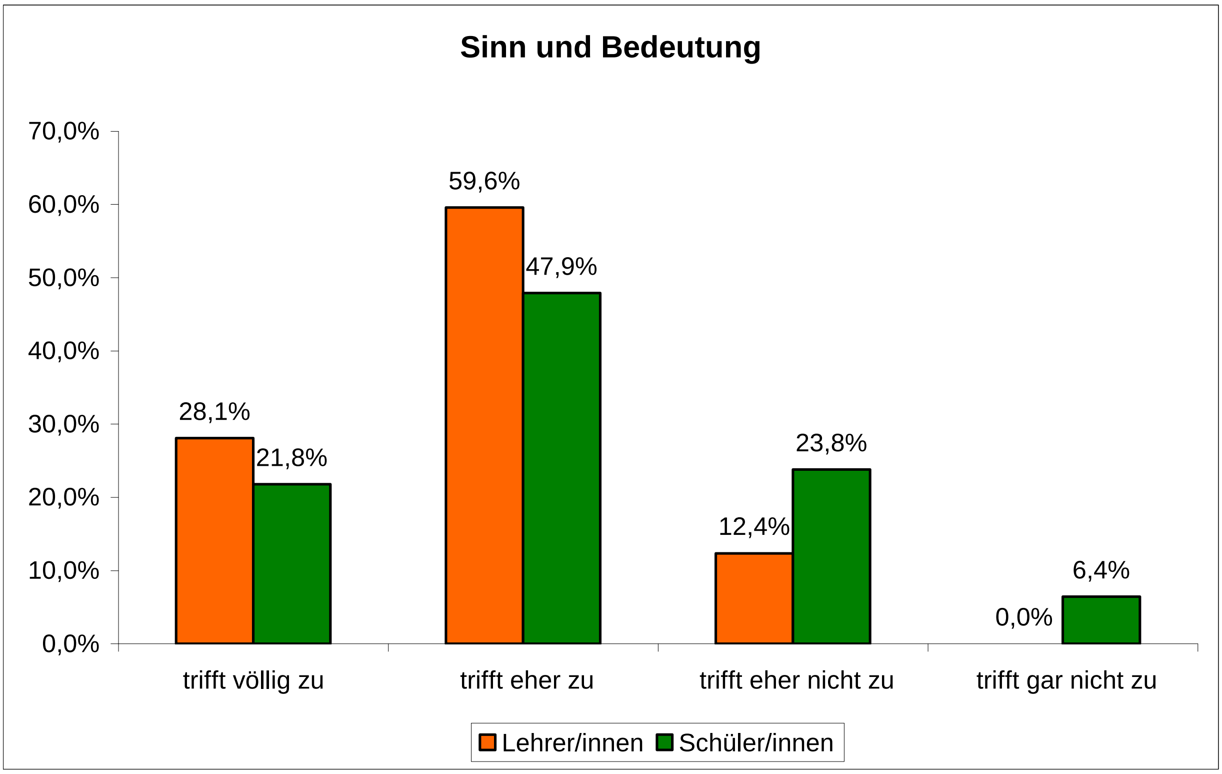


Der Unterschied der Ergebnisse ist relativ gering, allerdings empfinden die Lehrer/innen noch deutlicher als die Schüler/innen, dass es beim Absolvieren des Lernpfades wichtig und möglich war, Verantwortung für den eigenen Lernprozess zu übernehmen.

7.5.2 Stiftung kultureller Kohärenz und Weltorientierung

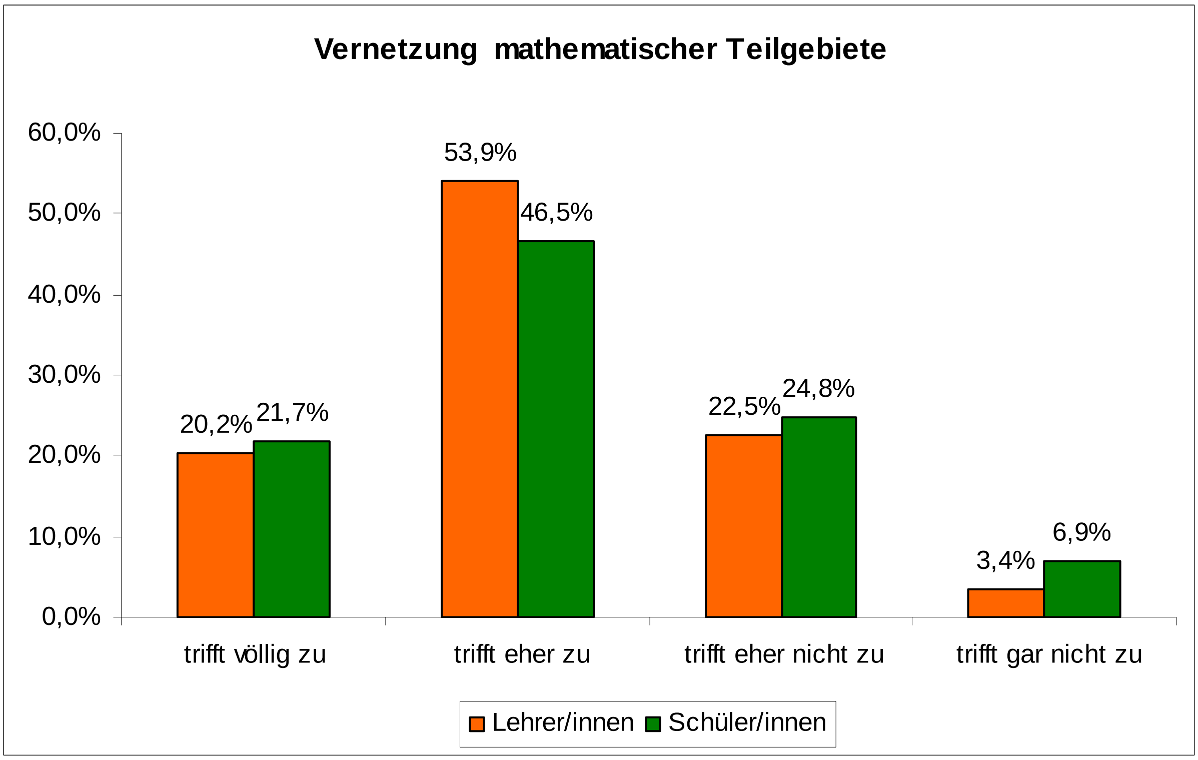
Ob die Lernpfade kulturelle Kohärenz stiften und zur Weltorientierung beitragen können, habe ich beim Lehrer/innenfragebogen und Schüler/innenfragebogen mit folgenden I-tems erhoben.

Lehrer/innen: „Im Lernpfad werden Sinn und Bedeutung der jeweils anstehenden Mathematik für Schüler/innen nachvollziehbar thematisiert“
Schüler/innen: „Der Sinn und die Bedeutung der neu erlernten Begriffe sind mir durch den Lernpfad klar geworden“



Auch hier zeigt sich ein ähnliches Bild wie zuvor. Die Lehrer/innen stimmen der Aussage: „Im Lernpfad werden Sinn und Bedeutung der jeweils anstehenden Mathematik für Schüler/innen nachvollziehbar thematisiert“ noch deutlicher zu als die Schüler/innen.
Bei der Frage, ob es mit den Lernpfaden gelungen ist, eine Vernetzung mathematischer Teilgebiete herauszuarbeiten bzw. ob die Schüler/innen einen Zusammenhang der neuen Teilgebiete mit anderen erkennen konnten, haben Schüler/innen und Lehrer/innen wiederum ähnlich geantwortet.

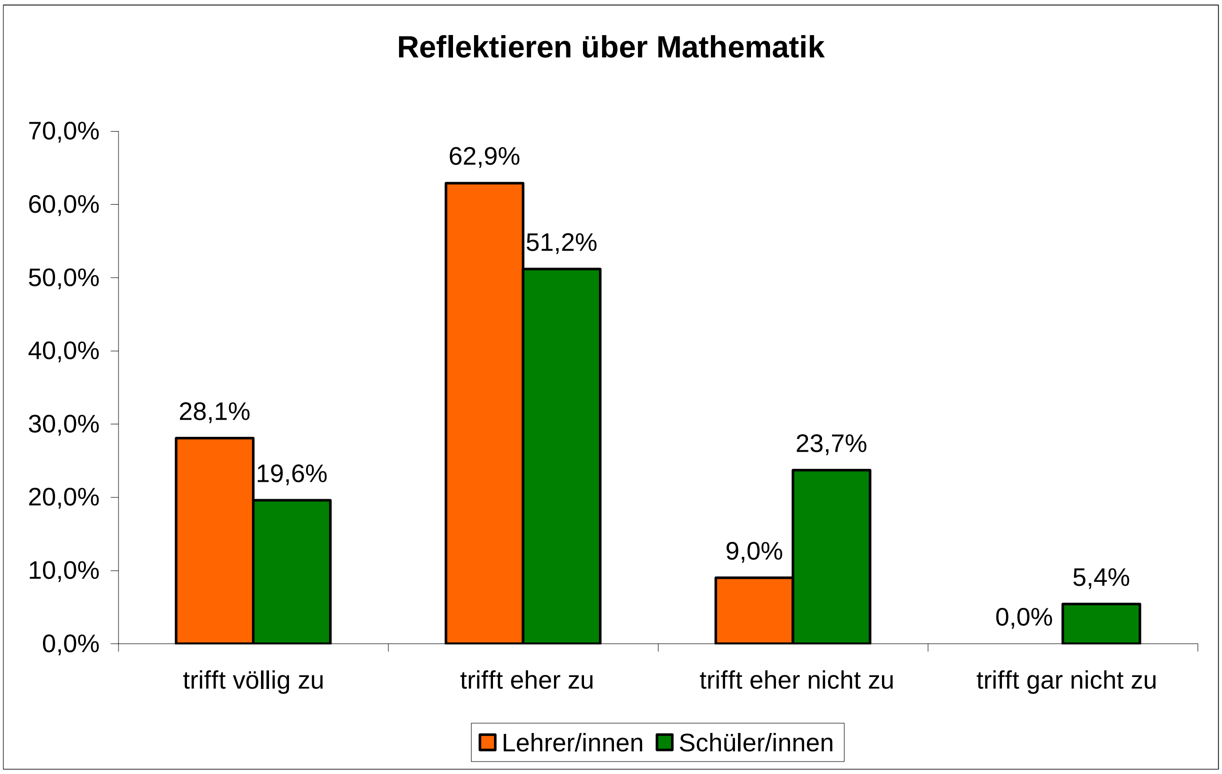
Das *Lehrer/innenitem* dazu lautete: „Die Vernetzung zwischen mathematischen Teilgebieten wird im Lernpfad für Schüler/innen erkennbar herausgearbeitet“.
Das *Schüler/innenitem* dazu war: „Mit Hilfe dieses Lernpfades konnte ich erkennen, dass dieses neue mathematische Teilgebiet einen Zusammenhang mit anderen mathematischen Gebieten hat“.



7.5.3 Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch

Für Heymann ist das Reflektieren über mathematisches Tun ein typisches Merkmal allgemein bildender Unterrichtskultur, insbesondere ist es ein Merkmal, das hohe Relevanz für die Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch hat [Hey, S. 264 ff.].

Im *Lehrer/innen*fragebogen gab es dazu folgendes Item: „Der Lernpfad ermöglicht Schüler/innen das Reflektieren über ihr mathematisches Tun“, im *Schüler/innen*fragebogen ein analoges: „Beim Bearbeiten dieses Lernpfades gab es Gelegenheiten, über das mathematische Tun nachzudenken“.



Beim Vergleich der Ergebnisse zeigt sich, dass 91% der Lehrer/innen und 70,8% der Schüler/innen völlig bzw. eher überzeugt sind, dass der Lernpfad das Reflektieren über mathematisches Tun ermöglicht. Die Intention der Lernpfade – nämlich das Reflektieren über mathematisches Tun zu fördern – scheint bei den Lehrer/innen stärker wahrgenommen zu werden als in der Realität des Unterrichts bei den Schüler/innen.

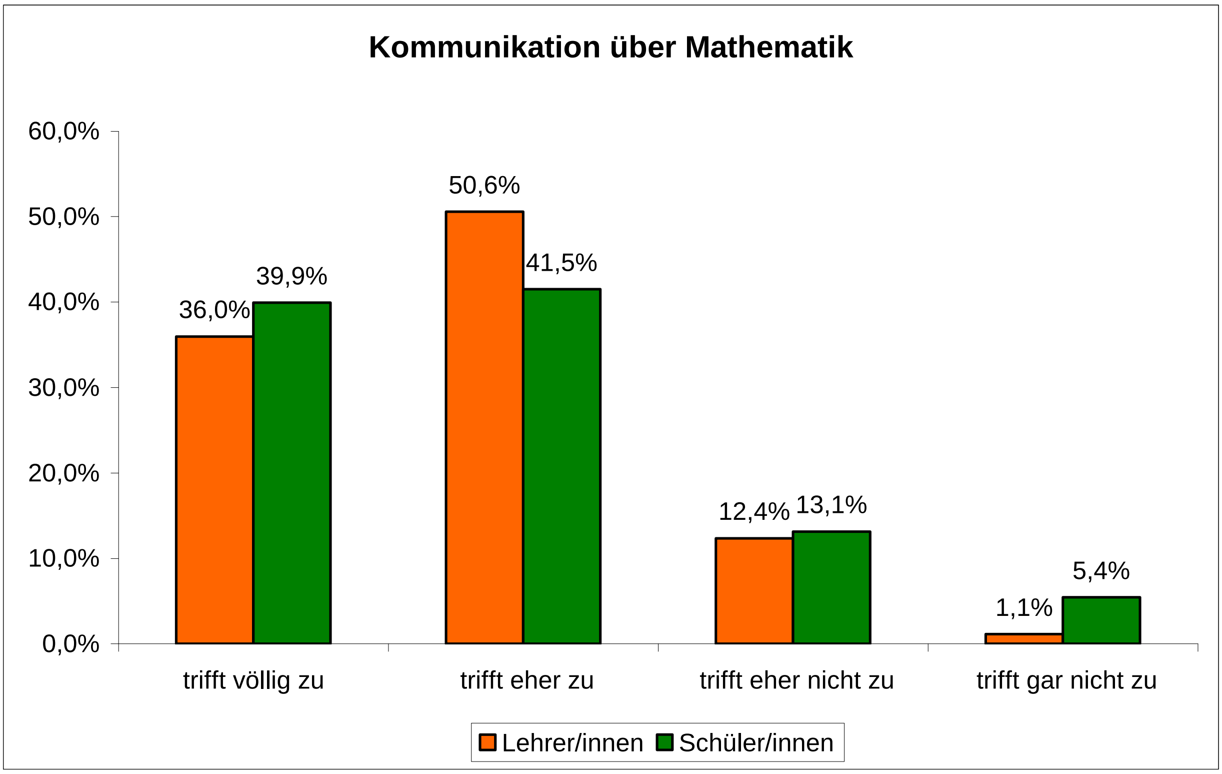
7.5.4 Verständigung und Kooperation

Die Einübung in Verständigung und Kooperation manifestiert sich für Heymann in direkter Kommunikation und Kooperation der Schüler/innen [Hey, S. 264 ff.]. Die entsprechenden Items im Fragebogen und deren Vergleich stelle ich im Folgenden dar.

Kommunikation

Lehrer/innen: „Die vorgeschlagene Unterrichtsmethode fördert die Kommunikation der Schüler/innen untereinander über Mathematik“

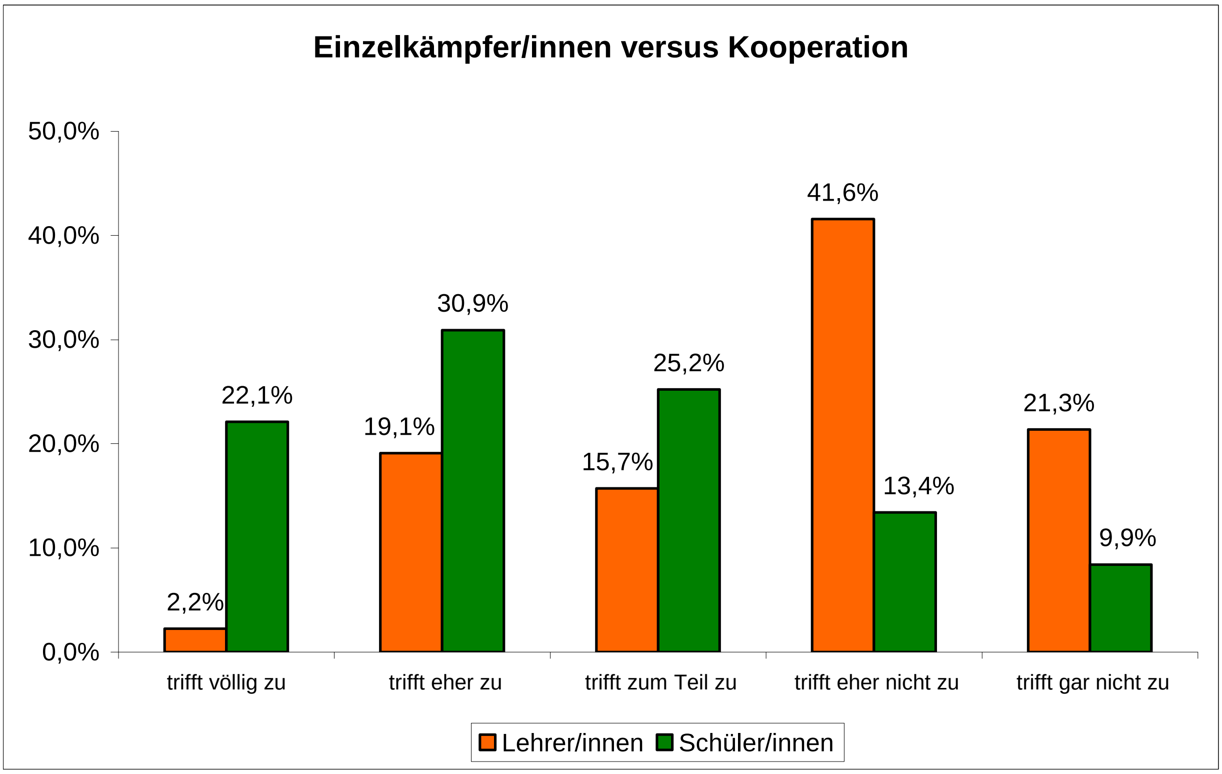
Schüler/innen: „Beim Durcharbeiten dieses Lernpfades war es möglich, mit anderen Schüler/innen über die mathematischen Inhalte zu sprechen“



Kooperation

Lehrer/innen: „Beim Absolvieren des Lernpfades erleben sich die Schüler/innen als Einzelkämpfer, „Kooperation“ findet lediglich auf der informellen Ebene des Unterricht (z. B.: Mogeln) statt“

Schüler/innen: „Der Unterricht mit diesem Lernpfad hat mir immer wieder Gelegenheit geboten, gemeinsam mit anderen an Probleme heranzugehen, d. h. wir konnten uns über Ziele und Strategien verständigen, wechselseitige Schwächen ausgleichen und Stärken bündeln (z. B.: in Partner- und Gruppenarbeit)“



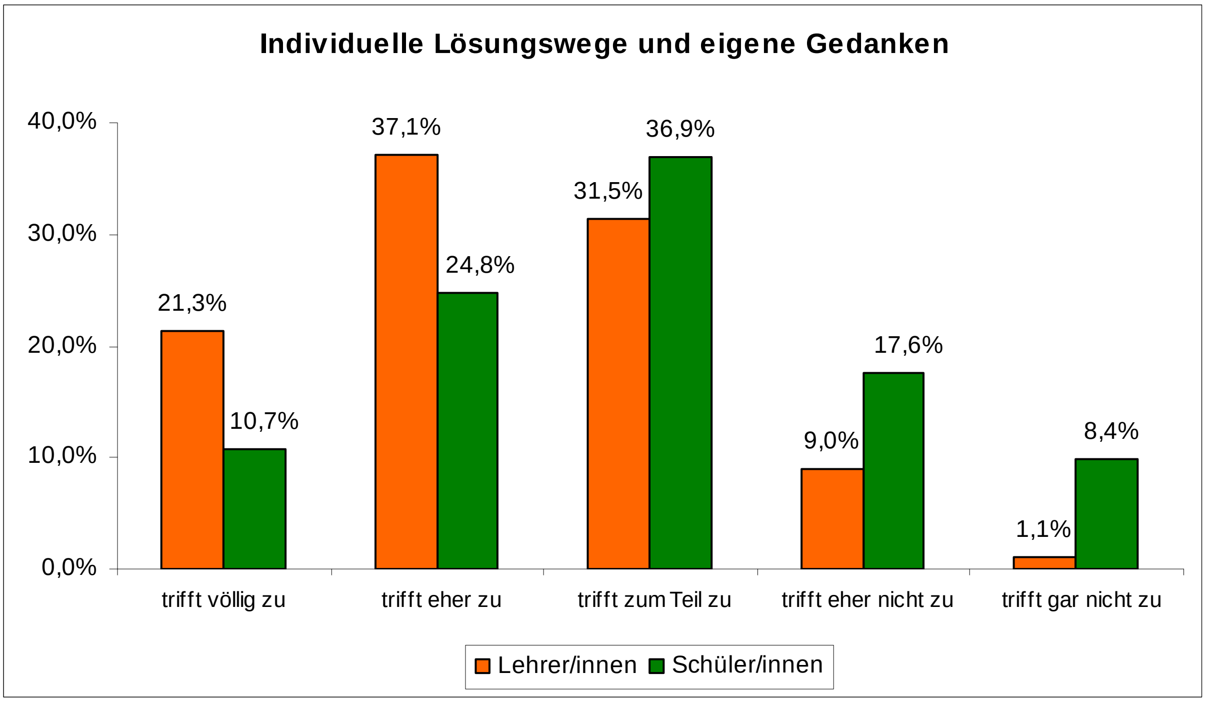
Die Ergebnisse verdeutlichen, dass beide Gruppen der Aussage, dass die Lernpfade die Kommunikation über Mathematik fördern, zustimmen. Die Lehrer/innen lehnen in überwiegendem Maß die Aussage: „Beim Absolvieren des Lernpfades erleben sich die Schüler/innen als Einzelkämpfer, „Kooperation" findet lediglich auf der informellen Ebene des Unterricht (z.B.: Mogeln) statt", ab (62,9%); die Schüler/innen stimmen weniger, aber immer noch eindeutig der Aussage: „Der Unterricht mit diesem Lernpfad hat mir immer wieder Gelegenheit geboten, gemeinsam mit anderen an Probleme heranzugehen, d. h. wir konnten uns über Ziele und Strategien verständigen, wechselseitige Schwächen ausgleichen und Stärken bündeln (z. B.: in Partner- und Gruppenarbeit)", zu (53%).

Insgesamt folgt also, dass die Lernpfade aus Sicht der Lernenden bzw. die Unterrichtsmethode aus Sicht der Lehrenden die Kommunikation über Mathematik einhellig und die Kooperation der Schüler/innen untereinander in beiden Fällen mehrheitlich fördert.

7.5.5 Stärkung des Schüler-Ichs

Die Stärkung des Schüler-Ichs ist mir ein wichtiges Anliegen, da ein gewisses Maß an Selbstvertrauen in die eigenen Fertigkeiten und Fähigkeiten Mut zur Auseinandersetzung mit neuen, eventuell komplexeren Inhalten macht. Nach Heymann kann ein Unterricht, in dem unterschiedliche und individuelle Lösungswege möglich sind, also auch eigene Gedanken von Schüler/innen eingebracht und den Lehrer/innen berücksichtigt werden, zur Stärkung des Schüler-Ichs beitragen [Hey, S. 264 ff.].

Die diesbezüglichen Items lauteten:
Lehrer/innen: „Der Lernpfad ermöglicht Schüler/innen unterschiedliche und individuelle Lösungswege"
Schüler/innen: „Meine eigenen Gedanken wurden beim Erarbeiten der Inhalte dieses Lernpfades berücksichtigt"



Hier unterscheiden sich die Ergebnisse der Schüler/innen am deutlichsten von denen der Lehrer/innen. Denn 58,4% der Lehrer/innen stimmen der Aussage: „Der Lernpfad ermöglicht Schüler/innen unterschiedliche und individuelle Lösungswege", völlig bzw. eher zu, aber nur 35,5% der Schüler/innen stimmen der Aussage: „Meine eigenen Gedanken wurden beim Erarbeiten der Inhalte dieses Lernpfades berücksichtigt", völlig bzw. eher zu.

Die Gründe, warum Schüler/innen das Erlernen mathematischer Inhalte mit dem Lernpfad eher als das Nachvollziehen eines fix vorgegebenen Weges empfinden und weniger das Gefühl haben, dass ihre eigenen Gedanken beim Erarbeiten der Inhalte mit dem Lernpfad berücksichtigt wurden, habe ich im Abschnitt 7.2.6.3 genau dargestellt. Es scheint so, als würden die Schüler/innen die didaktische Vorsortierung der Inhalte und den linearen Aufbau der Lernpfade „einengender" als die Lehrer/innen empfinden, die diese didaktische Vorsortierung ja ohnehin täglich durchführen.

Insgesamt stimmen aber die Meinungen der Lehrer/innen mit denen der Schüler/innen in einem überraschend hohen Ausmaß überein. Dass das nicht so ohne weiteres zu erwarten war, haben die bereits angesprochenen Begleituntersuchungen zum CAS-Projekt aus dem Jahr 1998 [Gro, S. 35] sowie die Begleituntersuchungen zu einem DERIVE Projekte aus dem Jahr 1995 [Sve, S. 48] gezeigt.

8. Zusammenfassung und Ausblick

Nachdem ich nun in der hier vorliegenden Arbeit die Beziehung zwischen allgemein bildendem Mathematikunterricht und dem Einsatz neuer Medien hergestellt sowie den Beitrag neuer Medien zum Lehren, Lernen und Verstehen im Mathematikunterricht aus theoretischer und empirischer Sicht dargelegt habe, möchte ich abschließend noch einmal die wesentlichen Erkenntnisse der Evaluation auflisten und mit einem Ausblick auf zukünftige Perspektiven bzw. Fragestellungen meine Arbeit an diesem Dissertationsprojekt abschließen.

Mit den in dieser Arbeit evaluierten Lernpfaden können Merkmale einer allgemein bildenden Unterrichtskultur umgesetzt und die von Heymann formulierten sieben Allgemeinbildungsaufgaben realisiert und zu einem Gutteil werden. Für die Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft sowie die Einübung in Verständigung und Kooperation ist die Unterrichtskultur bedeutender als der Einsatz interaktiver Multimedia-Komponenten.

Interaktive Multimedia-Komponenten können enorm hilfreich beim Verstehen sein. Sie sind es jedenfalls dann, wenn ein echter Erkenntnisgewinn durch sie möglich wird. Dieser wird dann möglich, wenn die Schüler/innen selbstständig Veränderungen an den Komponenten vornehmen und deren Auswirkungen beobachten können. Dabei sind offene Aufgabenstellungen und ein großer Freiheitsgrad der interaktiven Multimedia-Komponenten zu bevorzugen, denn dadurch wird individuelles und selbstgesteuertes Lernen sowie das Einbringen eigener Gedanken gefördert.

Eine positive Selbsteinschätzung der Schülerinnen und Schüler hinsichtlich ihrer eigenen Computerkenntnisse trägt wesentlich dazu bei, dass die Schülerinnen und Schüler nach dem Absolvieren eines Lernpfads eher zustimmen, den durch den Lernpfad vermittelten mathematischen Inhalt verstanden zu haben.

Die gängige mathematische Software – Excel, GeoGebra, CAS – ist trotz bester Anleitungen für Schülerinnen und Schüler unterschiedlich schwer bzw. leicht zu handhaben. Besonders der Umgang mit CAS bereitet den Schülerinnen und Schülern Schwierigkeiten.

Die zweifellos positiven Auswirkungen, die der Einsatz von Lernpfaden auf das Erreichen allgemein bildender Merkmale im Mathematikunterricht mit sich bringt, werden also in erster Linie vom Fehlen der handwerklichen Fähigkeiten, die man zur Begehung dieser Lernpfade braucht, gehemmt. Für die Zukunft gilt es daher zu überlegen,

1. wie in einem computerorientierten Mathematikunterricht, in dem die Schülerinnen und Schüler zweifellos Medien- und Werkzeugkompetenzen brauchen, zu einer positiven Selbsteinschätzung der Schüler/innen hinsichtlich ihrer eigenen Computerkenntnisse beigetragen werden kann.

2. Ferner wäre zu erproben, ob mit der Erstellung eines E-Portfolios, bei dem unter anderem auch die Bewusstmachung und Reflexion vorhandener Kenntnisse und Kompetenzen wichtig sind, zur eben erwähnten positiven Selbsteinschätzung der Schüler/innen beigetragen werden kann.

3. Zu guter Letzt bleibt immer noch zu überlegen, was unternommen werden kann und muss, damit Schwierigkeiten beim Umgang mit einem CAS nahezu ausgeschlossen werden können.

9. Literaturverzeichnis

[Ade] Ader, D.: Kress, A. (1980): Sprechen, Sprache, Unterricht. Schöningh

[Asp] Aspetsberger, K., Fuchs, K.J. (1995): Derive im Mathematikunterricht: Zur Organisation von Beobachtungseinheiten; Modultechnik im Mathematikunterricht mit CAS. In: K.P. Müller (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 29.Tagung für Didaktik der Mathematik, 6.-10.März 1995, Kassel, Franzbecker, Hildesheim

[Bau] Baumgartner, P. (1999): Lernen mit Software. STUDIENVerlag, Innsbruck, Wien, München

[Be] Bescherer, C. (2005): WebQuests als Lernumgebung für prozessbezogene Kompetenzen im Mathematikunterricht. In B. Barzel, T Leuders: Computer, Internet & Co. Im Mathematik-Unterricht, S. 107-117. Cornelsen Verlag, Berlin

[bm:bwk1] Standards für Mathematik am Ende der Sekundarstufe 1. Version 2.1(2003)

[bm:bwk2] Bildungsstandards für Mathematik am Ende der 8. Schulstufe. Version 3.0 (2004)

[Bru1] Bruner, J.S. (1961): The Act of Discovery. In: Harvard Educational Review 31, S. 21-32

[Bru2] Bruner, J.S. (1970): Der Prozeß der Erziehung. Schwann, Berlin – Düsseldorf

[Col] Collins, A., Brown, J.S., Newman, S.E. (1989): Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing and mathematics. In: L.B. Resnick (Hrsg.), Knowing, learning and instruction. Essays in the honour of Robert Glaser. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Ass., S. 453-494

[d’Avis] D’Avis, W. (1994): Können Computer denken? Campus Verlag, Frankfurt/New York

[Dör] Dörfler, W. (1991): Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium. In: Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Band 21, S. 51. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien

[Döri] Döring, N. (2003): Sozialpsychologie des Internet. Die Bedeutung des Internet für Kommunikationsprozesse, Identitäten, soziale Beziehungen und Gruppen. Hogrefe-Verlag, Göttingen

[El] Elschenbroich, H.J. (2001): Zeichnung – Figur – Zugfigur. Mathematische und didaktische Aspekte Dynamischer Geometrie-Software. Franzbecker, Hildesheim

[Em] Embacher, F. Stepancik, E. Grosser, N. Zach, W. Wisenöcker, W. Kulha, W. (2003): mathe-online – Perspektiven für einen zeitgemäßen Mathematikunterricht

[Er] Ernst, A. (2005): Konstruktivistisch orientierte Aufbereitung mathematikdidaktischer Inhalte für Hypermedia. Franzbecker, Hildesheim

[Fe] Ferber, R. (2002): Dokumentsuche und Dokumenterschließung. In: P. Rechenberg, G. Pomberger (Hrsg.): Informatik-Handbuch. Hanser Verlag, München Wien

[Fi1] Fischer, R. (o.J.): Höhere Allgemeinbildung. Unveröffentlichtes Manuskript

[Fi2] Fischer, R. (o.J.): Höhere Allgemeinbildung II. Unveröffentlichtes Manuskript

[Fu1] Fuchs, K.J. (1998): Computeralgebra – Neue Perspektiven im Mathematikunterricht. Habilitationsschrift, Universität Salzburg

[Fu2] Fuchs, K.J. Landerer, C. (2005): Das mühsame Ringen um ein Kompetenzmodell. In: CD Austria: das Multimedia-Magazin für die ganze Familie. In: Informatische Bildung in der Sekundarstufe I 12/2005: CD Austria, S. 6-9

[Fu3] Fuchs, K.J. (2006): Zur Entwicklung mathematischer und informatischer Kompetenzen mit Neuen Medien. Über die Notwendigkeit der symbolischen Repräsentation im konstruktivistischen Lernparadigma. In: A. Caba, C. Dorninger (Red) eLearning – Didaktik an Österreichs Schulen. Bm:bwk, Wien, S. 62-65

[Flo] Floyd, J. (2005): Wittgenstein's Philosophy of Logic and Mathematics. In: Shapiro, S. et al, Oxford Handbook to the Philosophy of Logic and Mathematics. Oxford University Press, S. 75-118.

[GDM] Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. Nr. 81 (2004)

[Gö] Götz, S. (2004): Arbeitskreis „Mathematikunterricht und Mathematikdidaktik in Österreich". In: Mitteilungen der GDM, Nr. 79, S. 38

[Gra] Graumann, G. (1993): Wodurch wird der Mathematikunterricht allgemeinbildend? In: Arbeitskreis Mathematik und Bildung. Mehr Allgemeinbildung im Mathematikunterricht. Bd. 2. Polygon, Buxheim-Eichstätt

[Gro] Grogger, G. (1998): Evaluation zur Erprobung des TI92 im Mathematikunterricht an Allgemeinbildenden höheren Schulen. Ergebnisse der bundesweiten Schüler- und Lehrerbefragungen im Schuljahr 1997/98. http://www.acdca.ac.at/projekt2/evaluat/evaluat2.htm (gültig am 16.11.2007)

[Häu] Häuptle, E. (2006): Notebook-Klassen an einer Hauptschule. Eine Einzelfallstudie zur Wirkung eines Notebook-Einsatzes auf Unterricht, Schüler und Schule. Dissertationsschrift, Universität Augsburg

[Has] Hasemann, K. (1988): Kognitionstheoretische Modelle und mathematische Lernprozesse. In: Journal für Mathematik Didaktik 9, Heft 2/3, S. 95-161.

[Hei] Heinze, A. (2007): Problemlösen im mathematischen und außermathematischen Kontext. In: Journal für Mathematik-Didaktik 28, Heft 1, S. 3-25

[Her] Herscovics, N. Bergeron, J.C. (1983): Models of understanding. In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 15, S. 75-83

[Heu] Heugl, H., Klinger, W., Lechner, J. (1996): Mathematikunterricht mit Computeralgebrasystemen. Addison-Weseley, Bonn

[Hey] Heymann, H.W. (1996): Allgemeinbildung und Mathematik. Studien zur Schulpädagogik und Didaktik. Bd.13. Verlag Beltz, Weinheim und Basel

[Hi1] Hischer, H. Weiß, M. (Hrsg.) (1995): Fundamentale Ideen – zur Zielorientierung eines Mathematikunterrichts unter Berücksichtigung der Informatik: proceedings; vom 23. bis 26. September 1994 in Wolfenbüttel. Franzbecker, Hildesheim

[Hi2] Hischer, H. (2005): Mathematikunterricht und Neue Medien. Franzbecker, Hildesheim, Berlin

[Hi3] Hischer, H. (1996): Computer und Geometrie – Neue Chancen für den Geometrieunterricht: proceedings; vom 20. bis 23. September 1996 in Wolfenbüttel. Franzbecker, Hildesheim

[Hi4] Hischer, H (1996): Geometrieunterricht vor neuen Chancen? In: Computer und Geometrie – Neue Chancen für den Geometrieunterricht: proceedings; vom 20. bis 23. September 1996 in Wolfenbüttel. Franzbecker, Hildesheim, S. 49-54

[Hof1] Hoffmann, M.H.G (2003): Warum Semiotik? In: M.H.G. Hoffmann (Hrsg.) Mathematik verstehen – Semiotische Perspektiven. Franzbecker, Hildesheim, S. 196-205

[Hof2] Hoffmann, M.H.G (2003): Semiotik als Analyse-Instrument. In: M.H.G. Hoffmann (Hrsg.) Mathematik verstehen – Semiotische Perspektiven. Franzbecker, Hildesheim, S. 34-77

[Hoh] Hohenwarter, M. (2006): GeoGebra – didaktische Materialien und Anwendungen für den Mathematikunterricht. Dissertationsschrift, Universität Salzburg

[Höl] Hölzl, R. (1997): Dynamische Geometriesysteme – softwaretechnologische Entwicklungen, didaktische Diskussionen und unterrichtspraktische Erfahrungen. In: H. Hischer (Hrsg.) Computer und Geometrie – Neue Chancen für den Geometrieunterricht?. Franzbecker, Hildesheim, S. 34-39

[Hol] Holland, G. (1996): Führt der Einsatz von DGS zu einem anderen Verständnis von Geometrie? In: H. Hischer (Hrsg.) Computer und Geometrie – Neue Chancen für den Geometrieunterricht: proceedings; vom 20. bis 23. September 1996 in Wolfenbüttel. Franzbecker, Hildesheim, S. 40-48

[Hub] Hubwieser, P. (2001): Didaktik der Informatik – Grundlagen, Konzepte, Beispiele. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York

[Iss] Issing, L.J. (1994): Von der Mediendidaktik zur Multimedia-Didaktik. In: Unterrichtswissenschaft 22, S. 267-284

[Ka] Kant, I. (2002): Was ist Aufklärung?, In: E. Bahr (Hrsg.) Was ist Aufklärung?, Reclam, Stuttgart

[Ker] Kerres, M. (2001): Multimediale und telemediale Lernumgebungen. Konzeption und Entwicklung. Verlag Oldenburg, München

[Kla1] Klafki, W. (1975): Studien zur Bildungstheorie und Didaktik. Verlag Beltz, Weinheim und Basel

[Kla2] Klafki, W. (1996): Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik: zeitgemäße Allgemeinbildung und kritisch-konstruktive Didaktik. Verlag Beltz, Weinheim und Basel

[Kli] Klippert, H. (2000): Methoden-Training. Verlag Beltz, Weinheim und Basel

[Klu] Kluge, F. (2002): Etymologisches Wörterbuch der deutschen Sprache. Walter de Gruyter, Berlin

[Kuh] Kuhlemann, G. Artgur Brühlmeier (2002): Johann Heinrich Pestalozzi. Band 2. Schneider Verlag, Hohengehren

[LP] Lehrplan der AHS-Oberstufe (2004)

[Ly] Lynch, P. (1999): Erfolgreiches Web-Design. Humboldt Taschenbuchverlag Jacobi KG, München

[Nim] Nimmervoll, L. (2006): „Lernen mit Computer muss man lernen“, Der Standard vom 07.06.2006

[Obe] Oberschelp, W. (1996): Computeralgebrasysteme als Implementierung symbolischer Termalgorithmen. In: H. Hischer M. Weiß (Hrsg.) Rechenfertigkeit und Begriffsbildung – Zu wesentlichen Aspekten des Mathematikunterrichts vor dem Hintergrund von Computeralgebrasystemen. Franzbecker, Hildesheim, S. 31-37

[Re1] Reichel, H.-C. (2000): Nachhaltiger Mathematikunterricht. Öbv & hpt, Wien

[Re2] Reichel, H.-C. (1993): Bildung durch Mathematik. In: Mehr Allgemeinbildung im Mathematikunterricht. Bd. 2 Verlag Polygon

[Re3] Reichel, H.-C. (2002): Der Beitrag der Mathematik und des Mathematikunterrichts zur Persönlichkeitsbildung

[Re4] Reichel, H.-C. Litschauer, D. Groß, H. (2000): Das ist Mathematik 1, öbv & hpt, Wien

[Rei] Reinmann, G. (2005): Blended Learning in der Lehrerbildung. Grundlagen für die Konzeption innovativer Lernumgebungen. Pabst Science Publisher, Lengrich

[Rho] Rhodes, D.M. Azbell, J.W. (1985): Designing Interactive Video Instruction Professionally. In: Training and Development Journal 39, S. 31-33

[San] Sanns, W. (2005): Genetisches Lehren von Mathematik an Fachhochschulen am Beispiel von Lehrveranstaltungen zur Katastrophentheorie. Der Andere Verlag, Tönningen, Lübeck und Marbug

[Sil] Siller, H-S. (2006): Modellbilden – eine zentrale Leitidee der Mathematik. Dissertationsschrift, Universität Salzburg

[Schn] Schneider, E. (2002): Computeralgebrasysteme in einem allgemeinbildenden Mathematikunterricht. Didaktische Orientierung – Praktische Erfahrung. Verlag Profil, München, Wien

[Schu1] Schulmeister, R. (1997): Grundlagen hypermedialer Lernsysteme. Theorie – Didaktik – Design. Oldenburg Wissenschaftsverlag, München

[Schu2] Schulmeister, R. (2000): Didaktische Aspekte hypermedialer Lernsystem. In: R. Kammerl (Hrsg.): Computergestütztes Lernen. Oldenburg, München

[Schu3] Schulmeister, R. (2002): Taxonomie der Interaktivität von Multimedia – ein Beitrag zur aktuellen Metadaten-Diskussion. In: Informationstechnik und Technische Informatik 44, S. 193-199, Oldenburg Verlag

[Schw] Schweiger, F. (1992): Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik. Journal für Mathematikdidaktik 13, Heft 2/3, S. 199-214

[Ske] Skemp, R.R. (1979): Goals of Learning and Qualities of Understanding. In: Mathematics Teaching 88, S. 44-49

[Ste] Steinbring, H. (2000): Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion – Grundzüge der epistemologisch orientierten mathematischen Interaktionsforschung. In: Journal für Mathematikdidaktik 21, Heft 1, S.28-49

[Strä] Sträßl, R. (1996): In welchem Sinne führt der Einsatz von DGS zu einem anderen Verständnis von Geometrie? In: H. Hischer (Hrsg.) Computer und Geometrie – Neue Chancen für den Geometrieunterricht?. Franzbecker, Hildesheim, S. 49-54

[Stru] Strube, G. et al. (1996): Wörterbuch der Kognitionswissenschaft. Klett-Cotta, Stuttgart

[Sve] Svecnik, E. (1995): Der Einsatz von DERIVE im Mathematikunterricht an allgemeinbildenden höheren Schulen (Gymnasien) in Österreich. ZSE Report Nr. 12. Zentrum für Schulentwicklung, Graz

[Ter] Tergan, S.-O. (2002): Hypertext und Hypermedia: Konzeption, Lernmöglichkeit, Lernprobleme und Perspektiven. In: Issing, L.J., Klimsa, P: Informationen und Lernen mit Multimedia und Internet, Verlagsgruppe Beltz, Psychologische Verlags Union, Weinheim, S. 99-113

[Vol1] Vollrath, H.J. (1989): Anstöße – Gedanken zu Martin Wagenschein. In: Journal für Mathematikdidaktik 10, Heft 2, S. 349-363

[Vol2] Vollrath, H.J. (1993): Paradoxien des Verstehens von Mathematik. In: Journal für Mathematikdidaktik 14, Heft 3/4, S. 35-58

[Wa] Wagenschein, M. (1999): Verstehen lehren. Beltz, Weinheim

[Wei] Weigand, H.G. (2006): Der Einsatz eines Taschencomputers in der 10. Jahrgangsstufe. Evaluation eines einjährigen Schulversuchs. In: Journal für Mathematikdidaktik 27, Heft 3, S. 89-112

[Wittg] Wittgenstein, L. (1999): Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik. Hrsg.: G.E.M. Anscombe, et al; Suhrkamp, Frankfurt

[Wittm] Wittmann, E.C. (1981): Grundfragen des Mathematikunterrichts. Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden

Anhang

Fragebogen für die Schüler/innen

Liebe Schülerinnen und Schüler,

dieser Fragebogen gibt dir die Möglichkeit Feedback zu unserem eLearning-Material zu geben. Du hilfst uns damit deine Meinung zu erfahren und die Qualität des Materials zu verbessern.

Bitte nimm dir ein wenig Zeit zur Beantwortung der folgenden Fragen. Versuche gerecht zu urteilen und antworte selbständig - lass dich nicht von anderen beeinflussen. Deine Antworten sind anonym!

Wenn du jetzt noch mehr über den Fragebogen oder die Beantwortung wissen willst, melde dich bitte und frag deine Lehrerin bzw. deinen Lehrer. Beginn dann mit dem Feedback.

====== Allgemeine Informationen ======

Zutreffendes bitte ankreuzen:

1. Mathematik ist ein Fach, das ich gerne mag: ☐ Ja ☐ Nein

2. In meinem Mathematikunterricht arbeite ich:

	Regelmäßig	Selten	Nie
in Gruppen	☐	☐	☐
mit einem Partner / einer Partnerin	☐	☐	☐
alleine	☐	☐	☐
mit einem Computer	☐	☐	☐
mit einem programmierbaren Taschenrechner	☐	☐	☐
mit einer Lernplattform	☐	☐	☐
mit einem Webquest	☐	☐	☐
mit anderem:	☐	☐	☐

3. Ich kenne mich mit dem Computer gut aus:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐

====== Zum Lernpfad ======

Wählen hier den Titel des Lernpfades aus, zu dem du jetzt die Fragen beantwortest:

☐ Koordinatensystem und geometrische Grundbegriffe
☐ Kongruenz - vermuten, erklären, begründen
☐ Dreiecke - Merkwürdige Punkte
☐ Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1
☐ Vektorrechnung in der Ebene, Teil 2
☐ Pythagoras (3. Klasse)
☐ Pythagoras im Raum (4. Klasse)

☐ Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung
☐ Zylinder - Kegel – Kugel
☐ Beschreibende Statistik (4. Klasse)
☐ Einführung in die Differentialrechnung
☐ Einführung in die Integralrechnung
☐ Funktionen - Einstieg
☐ RSA-Algorithmus: Asymmetrische Verschlüsselung

Bei manchen der folgenden Fragen kann es dir helfen, wenn du nochmals einen Blick auf die Materialien (http://www.austromath.at/medienvielfalt/) wirfst.

Zutreffendes bitte ankreuzen:

4. Ich habe mich mit den Links im Lernpfad sehr gut zurechtgefunden:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐

5. Das Layout des Lernpfades (Farbe, Bilder, Anordnung) gefällt mir:
☐ Nein ☐ Ja

6. Ich habe die Texte im Lernpfad immer vollständig gelesen:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft zum Teil zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐	☐

7. Die Sprache des Lernpfads war verständlich:

zur Gänze	größtenteils	teilweise	gar nicht
☐	☐	☐	☐

8. Für einige Aufgabenstellungen hast du möglicherweise neben dem Internet auch spezielle mathematische Software verwendet:

		Die Software war (mithilfe der Erklärungen im Lernpfad) leicht zu handhaben!		
	wurde verwendet	trifft zu	trifft zum Teil zu	trifft nicht zu
Derive	☐	☐	☐	☐
Geogebra	☐	☐	☐	☐
Excel	☐	☐	☐	☐
Voyage, TI89, …	☐	☐	☐	☐
Andere: ……	☐	☐	☐	☐

9. Die „interaktiven Übungen“ (dynamische Arbeitsblätter, Animationen, …) haben mir beim Verstehen geholfen:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft zum Teil zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐	☐

Bitte beschreibe stichwortartig eine solche „interaktive Übung“ und versuche zu erklären, was dir dabei geholfen hat:

……………………………………………… ………………………………………………………………
………
………
………

10. Ich habe auch zuhause mit dem Lernpfad gearbeitet:

sehr oft	oft	manchmal	nie
☐	☐	☐	☐

11. Ich möchte im Mathematikunterricht wieder mit einem Lernpfad arbeiten:
☐ Ja ☐ Nein

12. Ich werde / habe den Lernpfad zum Üben für die Schularbeit verwendet:
☐ Ja ☐ Nein

13. Ich habe alle wichtigen mathematischen Inhalte des Lernpfads verstanden:

trifft gar nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft völlig zu
☐	☐	☐	☐

14. Beim Durcharbeiten dieses Lernpfades war es möglich, mit anderen Schüler/innen über die mathematischen Inhalte zu sprechen:

trifft gar nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft völlig zu
☐	☐	☐	☐

15. Das Verstehen der mathematischen Inhalte war beim Bearbeiten dieses Lernpfades sehr wichtig.

trifft gar nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft völlig zu
☐	☐	☐	☐

16. Beim Bearbeiten dieses Lernpfades gab es Gelegenheiten, über das mathematische Tun nachzudenken:

trifft gar nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft völlig zu
☐	☐	☐	☐

17. Meine eigenen Gedanken wurden beim Erarbeiten der Inhalte dieses Lernpfades berücksichtigt:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft zum Teil zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐	☐

18. Das Erlernen der mathematische Inhalte mit diesem Lernpfad habe ich als das Nachvollziehen eines fix vorgegebenen Weges empfunden:

trifft gar nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft zum Teil zu	trifft eher zu	trifft völlig zu
☐	☐	☐	☐	☐

19. Beim Erlernen der mathematischen Inhalte mit diesem Lernpfad konnte ich allein oder mit anderen gemeinsam Ideen und Argumente austauschen:

trifft gar nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft zum Teil zu	trifft eher zu	trifft völlig zu
☐	☐	☐	☐	☐

20. Ich habe diesen Lernpfad mit Neugier, Engagement sowie Lust am Denken und mathematischen Tun absolviert:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐

21. Der Sinn und die Bedeutung der neu erlernten Begriffe sind mir durch den Lernpfad klar geworden:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐

22. Mit Hilfe dieses Lernpfades konnte ich erkennen, dass dieses neue mathematische Teilgebiet einen Zusammenhang mit anderen mathematischen Gebieten hat:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐

23. Beim Erlernen der Inhalte mit diesem Lernpfad war ich selbst für meinen Lernfortschritt und Lernprozess verantwortlich:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐

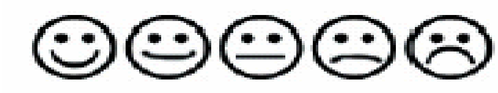
24. Bei der Arbeit mit diesem Lernpfad war es selbstverständlich Mitschüler/innen beim Verstehen zu helfen und selbst, wenn nötig, Hilfe zu bekommen.

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft zum Teil zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐	☐

25. Der Unterricht mit diesem Lernpfad hat mir immer wieder Gelegenheit geboten, gemeinsam mit anderen an Probleme heranzugehen, d.h. wir konnten uns über Ziele und Strategien verständigen, wechselseitige Schwächen ausgleichen und Stärken bündeln (z.B.: in Partner- und Gruppenarbeit):

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft zum Teil zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐	☐

26. Wie zufrieden bist du mit diesem Lernpfad:
Bitte kreuze das Gesicht an, das am ehesten deiner Zufriedenheit entspricht!



sehr zufrieden　　　　sehr unzufrieden

Wenn du möchtest, kannst du hier genauer angeben, was dir am Lernpfad gut gefallen oder was dich gestört hat.

Gut gefallen hat mir: ……………………………………………………………………………………

………

………

………

Gestört hat mich: ……………………………………………………………………………………

………

………

………

Fragebogen für die Lehrer/innen

Sehr geehrte Testlehrerinnen und Testlehrer,

dieser Fragebogen gibt Ihnen die Möglichkeit Feedback zum vorliegenden eLearning-Material zu geben. Sie helfen uns damit Ihre Meinung zu erfahren und die Qualität des Materials zu verbessern.

Bitte nehmen Sie sich ein wenig Zeit zur Beantwortung der folgenden Fragen und füllen Sie je Lernpfad einen Fragebogen aus.

====== *Allgemeine Informationen* ======

Zutreffendes bitte ankreuzen:

1. Unsere Schule beteiligt sich an einem der folgenden Projekte.

☐ AIMS ☐ TEOS ☐ eLSA ☐ eLC ☐ IMST

☐ an anderen innovativen Projekte: . . . .

2. Ich habe in meinem Mathematikunterricht bereits vor dem Einsatz des Lernpfads aus dem Projekt Medienvielfalt im Mathematikunterricht Erfahrung mit neuer Lernkultur oder eLearning gemacht:

	Regelmäßig	Selten	Nie
EVA (Lernspirale, …)	☐	☐	☐
Stationenbetrieb (Offenes Lernen)	☐	☐	☐
Lernsequenz am Computer	☐	☐	☐
Plattformeinsatz	☐	☐	☐
Webquest	☐	☐	☐
Andere:	☐	☐	☐

====== *Methodisch und didaktischer Kommentar* ======

Wählen Sie hier den Titel Ihres Lernpfades aus:
☐ Koordinatensystem und geometrische Grundbegriffe
☐ Kongruenz - vermuten, erklären, begründen
☐ Dreiecke - Merkwürdige Punkte
☐ Vektorrechnung in der Ebene, Teil 1
☐ Vektorrechnung in der Ebene, Teil 2
☐ Pythagoras (3. Klasse)
☐ Pythagoras im Raum (4. Klasse)
☐ Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung
☐ Zylinder - Kegel - Kugel
☐ Beschreibende Statistik (4. Klasse)
☐ Einführung in die Differentialrechnung
☐ Einführung in die Integralrechnung
☐ Funktionen - Einstieg
☐ RSA-Algorithmus: Asymmetrische Verschlüsselung

Zu den Lernpfaden wurden von den Ersteller/innen Unterrichtsmethoden vorgeschlagen. Bitte füllen Sie alle Fragestellungen, soweit es auf den von Ihnen gewählten Lernpfad zutrifft, aus! Es kann durchaus hilfreich sein, nochmals einen Blick auf die Materialien (http://www.austromath.at/medienvielfalt/) zu werfen.

Zutreffendes bitte ankreuzen:

3. Ich habe den didaktischen Kommentar vor Einsatz des Materials vollständig gelesen:
☐ Ja ☐ Nein

4. Die im didaktischen Kommentar vorgeschlagene Anzahl an Unterrichtseinheiten konnte gut eingehalten werden: ☐ Nein ☐ Ja

Wenn „Nein", wie viele Unterrichtseinheiten wurden benötigt: . . . .

5. Ich habe die methodischen Anweisungen befolgt:

zur Gänze	größtenteils	teilweise	gar nicht
☐	☐	☐	☐

6. Im didaktischen Kommentar werden inhaltliche Vorkenntnisse genannt. Waren die genannten Kenntnisse zur erfolgreichen Absolvierung des Lernpfads ausreichend?

	ja	nein
Inhaltliche Vorkenntnisse	☐	☐

Falls „Nein", beschreiben Sie hier bitte, was Ihnen gefehlt hat:

7. Im didaktischen Kommentar werden methodische Vorkenntnisse genannt. Waren die genannten Kenntnisse zur erfolgreichen Absolvierung des Lernpfads ausreichend?

	ja	nein
Methodische Vorkenntnisse	☐	☐

Falls „Nein", beschreiben Sie hier bitte, was Ihnen gefehlt hat:

8. Im didaktischen Kommentar werden technische Vorkenntnisse genannt. Waren die genannten Kenntnisse zur erfolgreichen Absolvierung des Lernpfads ausreichend?

	ja	nein
Technische Vorkenntnisse	☐	☐

Falls „Nein", beschreiben Sie hier bitte, was Ihnen gefehlt hat:

9. Sind die begleitenden Vorschläge zur Umsetzung (Lernspirale, Themenplan, Arbeitsanleitung, …) des Lernpfads im Unterricht für technologieunterstützten Unterricht geeignet?

sehr gut geeignet	eher geeignet	zum Teil geeignet	eher nicht geeignet	gar nicht geeignet
☐	☐	☐	☐	☐

10. Die methodischen Anleitungen zum Lernpfad waren für mich sehr hilfreich:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft zum Teil zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐	☐

11. Die vorgeschlagene Unterrichtsmethode fördert die Kommunikation der Schüler/innen untereinander über Mathematik:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐

====== *Zum Lernpfad* ======

12. Für die Gestaltung meines Unterrichts hätte ich die Zusammenstellung des Lernpfads gerne geändert:

ja	nein
☐	☐

Falls „Ja“, beschreiben Sie hier bitte stichwortartig Ihre Änderungsvorschläge:

…………………………………………………………………………………………………..

....

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

13. Für meinen Unterricht hätte ich gerne einzelne Teile des Lernpfades (Aufgabenstellungen, Aufgabentexte, Angaben, …) geändert:

ja	nein
☐	☐

Falls „Ja“, beschreiben Sie hier bitte stichwortartig Ihre Änderungsvorschläge:

…………………………………………………………………………………………………..

....

…………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………..

== Bitte achten Sie darauf, dass die folgenden Fragen speziell auf Ihren Unterricht mit dem Lernpfad abzielen im Unterschied zu anderen Unterrichtsmethoden! ==

14. Der Lernpfad ermöglicht Schüler/innen das Reflektieren über ihr mathematisches Tun:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐

15. Der Lernpfad ermöglicht Schüler/innen eine **stufenweise** Annäherung an mathematische Erkenntnisse, Hypothesen und Teillösungen, im Gegensatz zu einem Unterricht, wo es nur 100% richtige und falsche Antworten gibt:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐

16. Der Lernpfad ermöglicht Schüler/innen unterschiedliche und individuelle Lösungswege:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft zum Teil zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐	☐

17. Mit diesem Lernpfad erleben Schüler/innen Mathematiklernen als Erkundungsprozess, der allein oder gemeinsam mit anderen in intensivem Austausch von Ideen und Argumenten vollzogen werden kann:

trifft gar nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft zum Teil zu	trifft eher zu	trifft völlig zu
☐	☐	☐	☐	☐

18. Schüler/innen können mit diesem Lernpfad auf spielerische Weise in mathematikhaltigen Situationen ihre Phantasie und Kreativität erproben:

trifft gar nicht zu	trifft eher nicht zu	trifft eher zu	trifft völlig zu
☐	☐	☐	☐

19. Im Lernpfad werden Sinn und Bedeutung der jeweils anstehenden Mathematik für Schüler/innen nachvollziehbar thematisiert:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐

20. Die Vernetzung zwischen mathematischen Teilgebieten wird im Lernpfad für Schüler/innen erkennbar herausgearbeitet:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐

21. Beim Absolvieren des Lernpfades übernehmen die Schüler/innen Verantwortung für ihren eigenen Lernprozess:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐

22. Beim Absolvieren des Lernpfades erleben sich die Schüler/innen als Einzelkämpfer, „Kooperation" findet lediglich auf der informellen Ebene des Unterricht (z.B.: Mogeln) statt:

trifft völlig zu	trifft eher zu	trifft zum Teil zu	trifft eher nicht zu	trifft gar nicht zu
☐	☐	☐	☐	☐

Zum Abschluss möchte ich noch mitteilen: ……………………………………………………………

………

………

………

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	Evelyn Stepancik
Anschrift	Hebragasse 7/20 1090 Wien Tel.: 0699 11002893 E-Mail: estepancik@informatix.at
geboren am	9. Oktober 1971, in Mödling
Religion	römisch-katholisch
Familienstand	ledig
Staatsbürgerschaft	Österreich

Beruflicher Werdegang

seit September 2007	Betreuungslehrerin für die schulpraktische Ausbildung
seit August 2006	Schulbuchautorin beim Dorner-Verlag, Mathematik Oberstufe
seit November 2004	Mitarbeit am Projekt „Medienvielfalt im Mathematikunterricht" (mathe-online, ACDCA, Geogebra)
seit September 2004	Mitverwendung (Organisation und fachdidaktische Betreuung) im bm:bwk bzw. bm:ukk, Koordination des österreichweiten eLSA-Projekts (eLearning in der Unterstufe)
seit September 2003	Lehrtätigkeit an der TGA Mathematik (Berufsreifeprüfung); Mitarbeit in der eLSA Steuergruppe des bm:bwk
Sommersemester 2003	Lehrauftrag an der Universität Wien (Institut für Mathematik), Titel der LVA: Spezielle Kapitel der Schulinformatik
September 2003 bis September 2005	Betreuung des Netzwerkes (120 PCs und 600 User) des BG|BRG Purkersdorf; Mitarbeit bei monk http://www.mathe-online.at/monk/;
November 2002 bis Mai 2003	Lehrtätigkeit in der Lehrerfortbildung, Intel – Lehren für die Zukunft (EDV-Schulung für LehrerInnen)
seit September 2002	Projektleiterin und Fachkoordinatorin (Mathematik) von „eLSA" – eLearning im Schulalltag
Februar 2001 bis Februar 2003	Lehrtätigkeit am BFI Wien, Berufsreifeprüfung

seit September 2000	Lehrerin für Mathematik, Deutsch und Informatik am BG|BRG Purkersdorf (Niederösterreich)
Schuljahr 1999/2000	Lehrerin für Mathematik an der BHAK Wien 11 und am BG/BRG XII, Lehrtätigkeit an der VHS-Meidling, Berufsreifeprüfungskurs Mathematik
Schuljahr 1998/1999	Unterrichtspraktikum am BG/BRG XII,

Studium

seit Oktober 2003	Doktoratsstudium – Didaktik der Mathematik; Arbeitstitel: „Die Unterstützung des Verstehensprozesses und neue Aspekte der Allgemeinbildung im Mathematikunterricht durch den Einsatz neuer Medien."
November 2000 bis November 2003	Universitätslehrgang „Pädagogik und Fachdidaktik für LehrerInnen (PFL) – Mathematik" der Universität Klagenfurt
1999 – 2001	Lehrgang zum Informatiklehrer/in am Pädagogischen Institut der Stadt Wien
1989 – 1998	Lehramtsstudium für Mathematik und Germanistik, Abschluss: Magistra der Naturwissenschaften (mit ausgezeichnetem Erfolg)

Schulbesuch

1980 – 1989	Höhere Internatsschule des Bundes Wien, Abschluss: Matura mit ausgezeichnetem Erfolg
1976 – 1980	Volksschule, Achau (Bezirk Mödling)

Lehrer/innenfortbildung und Gastvorträge

Oktober 2007	2. eLearning Fachdidaktik Tagung „Können die neuen Medien zum Verstehen von Mathematik beitragen?"
Jänner 2007	Didaktik der neuen Medien (Akademielehrgang Informatik, PI-Burgenland)
August 2006	IKT-Lehrgang für Unterrichtspraktikant/innen (PI-Niederösterreich)

März 2006	Medienvielfaltstag (PI-Burgenland)
April 2005	ÖMG-Tagung (Wien), Medienvielfalt im Mathematikunterricht – gemeinsam mit Franz Embacher, Thomas Himmelbauer, Markus Hohenwarter
Jänner 2005	eLSA - eLearning im Schulalltag der Unterstufe: Ein Pionierprojekt macht Schule (OCG, Wien)
November 2004	eLearning und der Einsatz Blackboard in der SEK I (Kärnten und Salzburg)
Oktober 2004	Didaktik der Lernpfade (PI-Burgenland) Online-Moderatorin für eFamily im Fachbereich Mathematik (bm:bwk)
Dezember 2003	Konkrete Umsetzung, Erfahrungen, und methodische Hilfestellungen beim Erstellen von eLearning Einheiten (PI-Salzburg)
November 2003	eLearning und der Einsatz von Blackboard in der SEK I (Eisenstadt) eLearning im Schulalltag und Mathematikunterricht der AHS (PI-Niederösterreich) Lernpfade und ihr Einsatz im Mathematikunterricht (Technikum Wien)
September 2003	INFOS 2003, Länderforum Österreich – Projektpräsentation (München)
September 2001	ICL 2001, Die neuen Medien im Unterricht und zuhause (Villach)

Publikationen

„Einsatz von Wikis bei der Realisierung von Leistungsdarstellungen und ePortfolios im Unterricht“ (gemeinsam mit C. Schrack, Mai 2007, OCG)

„Exponentialfunktionen mit EVA“ (wissenplus, Mai 2006)

"Lernpfade im Mathematikunterricht - Ansätze zu einer breiten Integration" (gemeinsam mit Petra Oberhuemer, Franz Embacher und Martina Reichl; http://www.mathe-online.at/monk/Archiv/abschlussberichtNWW.pdf, 2004)

„mathe online – Perspektiven für einen zeitgemäßen Mathematikunterricht“ (gemeinsam mit Notburga Grosser, Wolfgang Wisenöcker, Walter Kulha, Wolfgang Zach und Franz Embacher; http://www.mathe-online.at/nww/Archiv/nww_abschlussbericht.pdf, 2003)

„Allgemein bildender Informatikunterricht – wie geht das?“ (in CD Austria, Sonderheft des bm:bwk; http://www.gym1.at/schulinformatik/buecher/informatik.pdf; 2003)

„Weltorientierung und kritischer Vernunftgebrauch im Statistikunterricht der 4. Klasse AHS“ (2002; PFL)

Danksagung

Zu allererst möchte ich mich bei all meinen Schülerinnen und Schülern bedanken, die stets bereitwillig meinen Unterrichtsideen gefolgt sind und somit dazu beigetragen haben, dass ich in den vergangenen Schuljahren meiner Forschungsfrage nachgehen und immer wieder Neues erproben konnte.

Ich danke allen, die mir bei der Durchführung dieser Arbeit behilflich waren, insbesondere auch all jenen Lehrerinnen und Lehrern, die mit ihren Schülerinnen und Schülern die Lernpfade aus dem Projekt „Medienvielfalt im Mathematikunterricht" eingesetzt und so zahlreich an der Online-Umfrage teilgenommen haben.

Weiters möchte ich mich bei allen Kolleginnen und Kollegen des Projekts „Medienvielfalt im Mathematikunterricht" für ihre kritischen und hilfreichen Reflexionen bedanken.

Meiner Freundin Esther danke ich für ihre klaren philosophischen Ausführungen – sie lassen einen Wittgenstein verstehen.

Horst Hischer bin ich dankbar dafür, dass er, ohne mich persönlich zu kennen, auf all meine Anfragen per E-Mail stets freundlich und profund geantwortet hat.

Zu guter Letzt danke ich Klaus für die technische Umsetzung der Fragebögen und seine Geduld bei der scheinbar nicht enden wollenden Abschlussphase dieser Arbeit.